

**POLITECHNIKA GDAŃSKA**  
WYDZIAŁ ELEKTRONIKI, TELEKOMUNIKACJI I INFORMATYKI  
KATEDRA SYSTEMÓW GEOINFORMATYCZNYCH



**GRADIENT ZESPOŁONEJ FAZY  
KRÓTKOCZASOWEJ TRANSFORMATY FOURIERA  
W ANALIZIE SPEKTROGRAFICZNEJ**

**Krzysztof Czarnecki**

**ROZPRAWA DOKTORSKA**  
napisana pod kierunkiem  
dra hab. inż. Marka Moszyńskiego

Gdańsk, 2013

# Spis treści

<b>Spis skrótów i oznaczeń</b>	<b>3</b>
<b>1 Wprowadzenie</b>	<b>8</b>
1.1 Wstęp	8
1.2 Tezy pracy	12
1.3 Przegląd rozdziałów	12
<b>2 Przegląd wybranych koncepcji analizy sygnałów</b>	<b>14</b>
2.1 Analiza w dziedzinie czasu	14
2.1.1 Zespolona pulsacja chwilowa	18
2.2 Analiza w dziedzinie częstotliwości	19
2.2.1 Zespolone opóźnienie grupowe	20
2.3 Analiza w dziedzinie czas-częstotliwość	21
2.3.1 Spektrogram klasyczny	24
2.3.2 Liczba stopni swobody sygnału	25
2.3.3 Optymalizacja okna analizującego	25
<b>3 Gradient zespolonej fazy STFT</b>	<b>29</b>
3.1 Wektorowe pole przemieszczające	30
3.2 Skoncentrowana STFT	31
3.3 Spektrogram skoncentrowany	31
3.4 Pochodne cząstkowe drugiego rzędu fazy STFT	32
3.5 Zespolona kanałowa pulsacja chwilowa	33
3.6 Zespolone lokalne opóźnienie grupowe	34
3.7 Gradient zespolonej fazy STFT	35
<b>4 Wybrane zastosowania</b>	<b>37</b>
4.1 Atraktogram	37
4.2 Akcelerogram kanałowej fazy chwilowej	41
4.2.1 Sygnały FM	41
4.2.2 Sygnały AM/FM	48
4.3 Analiza wybranych sygnałów syntetycznych	51
4.4 Analiza wybranych sygnałów akustycznych	59

<b>Podsumowanie</b>	<b>74</b>
<b>Spis rysunków</b>	<b>92</b>
<b>Dodatki</b>	<b>93</b>
System definicyjny . . . . .	93
Pochodne cząstkowe drugiego rzędu zespolonej fazy STFT . . . . .	94

# Spis skrótów i oznaczeń

## Rozwinięcia stosowanych skrótów

- LFM – liniowa modulacja częstotliwości  
(*ang. linear frequency modulation*)
- STFT – krótkoczasowa transformata Fouriera  
(*ang. short-time Fourier transform*)
- STFT<sub>{}</sub>  – krótkoczasowa transformacja Fouriera  
(*ang. short-time Fourier transformation*)
- CSTFT – skoncentrowana krótkoczasowa transformata Fouriera  
(*ang. concentrated short-time Fourier transform*)
- CSTFT<sub>{}</sub>  – skoncentrowana krótkoczasowa transformacja Fouriera  
(*ang. concentrated short-time Fourier transformation*)
- CT – transformata świergotowa  
(*ang. chirplet transform*)
- CT<sub>{}</sub>  – transformacja świergotowa  
(*ang. chirplet transformation*)
- IF – pulsacja chwilowa  
(*ang. instantaneous frequency*)
- GD – opóźnienie grupowe  
(*ang. group delay*)
- IBW – chwilowa szerokość pasma  
(*ang. instantaneous bandwidth*)
- GDR – grupowy czas trwania  
(*ang. group duration*)
- SIBW – znakowana chwilowa szerokość pasma  
(*ang. signed instantaneous bandwidth*)
- SGDR – znakowany grupowy czas trwania  
(*ang. signed group duration*)
- ICR – szybkość zmian częstotliwości chwilowej  
(*ang. instantaneous chirp-rate*)
- ICP – zespolona faza chwilowa  
(*ang. instantaneous complex phase*)



- ICF – zespolona pulsacja chwilowa  
(*ang. instantaneous complex frequency*)
- CGD – zespolone opóźnienie grupowe  
(*ang. complex group delay*)
- CIF – kanałowa pulsacja chwilowa  
(*ang. channelized instantaneous frequency*)
- LGD – lokalne opóźnienie grupowe  
(*ang. local group delay*)
- MVF – wektorowe pole przemieszczające  
(*ang. moving vector field*)
- CIBW – kanałowa chwilowa szerokość pasma  
(*ang. channelized instantaneous bandwidth*)
- LGDR – lokalny grupowy czas trwania  
(*ang. local group duration*)
- SCIBW – znakowana kanałowa chwilowa szerokość pasma  
(*ang. signed channelized instantaneous bandwidth*)
- SLGDR – znakowany lokalny grupowy czas trwania  
(*ang. signed local group duration*)
- CICF – kanałowa zespolona pulsacja chwilowa  
(*ang. channelized instantaneous complex frequency*)
- LCGD – lokalne zespolone opóźnienie grupowe  
(*ang. local complex group delay*)
- ECI – indeks koncentracji energii  
(*ang. energy concentration index*)
- LNDF – rozkład liczby stopni swobody  
(*ang. local number of degrees of freedom*)
- CICR – kanałowa chwilowa szybkość świergotu  
(*ang. channelized instantaneous chirp rate*)
- CIAA – kanałowe chwilowe przyspieszenie fazy  
(*ang. channelized instantaneous angular acceleration*)
- RMSE – błąd standardowy  
(*ang. root mean square error*)

## Operatory, estymatory i funktory matematyczne

- $\exp(\ )$  – funktor obliczający eksponent liczby zespolonej  
 $\arg\{ \}$  – operator obliczający argument liczby zespolonej  
 $\text{Arg}(\ )$  – funktor obliczający argument główny liczby zespolonej  
 $\ln\{ \}$  – operator obliczający logarytm naturalny liczby zespolonej  
 $\text{Ln}(\ )$  – funktor obliczający główny logarytm naturalny liczby zespolonej  
 $\text{re}(\ )$  – funktor obliczający część rzeczywistą liczby zespolonej  
 $\text{im}(\ )$  – funktor obliczający część urojoną liczby zespolonej  
 $| \ |$  – funktor obliczający moduł liczby zespolonej  
 $\frac{d}{dt}\{ \}$  – operator różniczkowy jednej zmiennej (przykład w dziedzinie czasu)  
 $\frac{\partial}{\partial t}\{ \}$  – operator różniczkowy obliczający pochodną cząstkową ( – „ – )  
 $\int\{ \}dt$  – operator całkowy (przykład w dziedzinie czasu)

## Oznaczenia i symbole

- $\pi$  – liczba pi  
 $j$  – jednostka urojona  
 $\infty$  – nieskończoność  
 $\mathbb{I}$  – zbiór liczb całkowitych  
 $\mathbb{R}$  – zbiór liczb rzeczywistych  
 $\mathbb{C}$  – zbiór liczb zespolonych  
 $t, \tau$  – czas  
 $\omega, \varpi$  – pulsacja  
 $f$  – częstotliwość  
 $r$  – szybkość świergotu (ang. *chirp-rate*)  
 $W_{\text{sum}}$  – skumulowana energia  
 $B_e$  – efektywna szerokość pasma (w hercach)  
 $T_e$  – efektywny czas trwania (w sekundach)  
 $T_{\text{win}}$  – efektywna szerokość okna analizującego (w sekundach)  
 $T_{\text{abs}}$  – absolutna szerokość okna analizującego (w sekundach)  
 $\chi$  – liczba stopni swobody sygnału  
 $\alpha_\chi$  – próg odcięcia liczby stopni swobody  
 $\sigma_R$  – odchylenie standardowe obliczone dla reprezentacji CICR od zadanego parametru  $r$   
 $\sigma_R$  – odchylenie standardowe obliczone dla reprezentacji CIAA od zadanego parametru  $r$   
 $l, k$  – indeksy  
 $L$  – liczba prążków STFT wzdłuż osi czasu  
 $K$  – liczba prążków STFT wzdłuż osi częstotliwości

## Reprezentacje sygnału w dziedzinie czasu

- $u(t)$  – sygnał zespolony lub równoważnik analityczny sygnału rzeczywistego
- $x(t)$  – składowa rzeczywista
- $y(t)$  – składowa urojona
- $a(t)$  – obwiednia, amplituda chwilowa
- $\varphi(t)$  – przebieg fazy chwilowej
- $\varphi_p(t)$  – przebieg głównej fazy chwilowej
- $\Phi(t)$  – przebieg zespolonej fazy chwilowej
- $E(t)$  – gęstość energii
- $\lambda(t)$  – logobwiednia
- $S(t)$  – zespolona pulsacja chwilowa
- $F(t)$  – częstotliwość chwilowa
- $\Omega(t)$  – pulsacja chwilowa
- $\Sigma(t)$  – znakowana chwilowa szerokość pasma (w rad·Hz)
- $\mathcal{B}(t)$  – znakowana chwilowa szerokość pasma (w hercach)
- $B(t)$  – chwilowa szerokość pasma (w hercach)
- $R(t)$  – szybkość zmian częstotliwości chwilowej

## Reprezentacje sygnału w dziedzinie częstotliwości

- $U(\omega)$  – widmo sygnału  $u(t)$
- $A(\omega)$  – widmo amplitudowe
- $\phi(\omega)$  – widmo fazowe
- $E(\omega)$  – gęstość energii
- $\Lambda(\omega)$  – logarytm naturalny widma amplitudowego
- $\Psi(\omega)$  – zespolone widmo fazowe
- $Z(\omega)$  – zespolone opóźnienie grupowe
- $\Theta(\omega)$  – widmo opóźnieniowe (w rad·s)
- $D(\omega)$  – widmo opóźnieniowe (w sekundach)
- $\mathcal{U}(\omega)$  – znakowany grupowy czas trwania (w rad·s)
- $\mathcal{F}(\omega)$  – znakowany grupowy czas trwania (w sekundach)
- $T(\omega)$  – grupowy czas trwania (w sekundach)

## Reprezentacje sygnału w dziedzinie czas-częstotliwości

- $\epsilon(t, \omega)$  – rozkład Rihaczka
- $U(t, \omega)$  – krótkoczasowa transformata Fouriera sygnału  $u(t)$
- $A(t, \omega)$  – moduł krótkoczasowej transformaty Fouriera
- $\phi(t, \omega)$  – faza krótkoczasowej transformaty Fouriera

$E(t, \omega)$  – gęstość energii  
 $W(t, \omega)$  – rozkład energii tzw. atomy gabora  
 $\Lambda(t, \omega)$  – logarytm naturalny modułu krótkoczasowej transformaty Fouriera  
 $\Psi(t, \omega)$  – zespolona faza krótkoczasowej transformaty Fouriera  
 $\nabla\Psi(\omega, t)$  – gradient zespolonej fazy krótkoczasowej transformaty Fouriera  
 $S(t, \omega)$  – kanałowa zespolona pulsacja chwilowa  
 $\Sigma(t, \omega)$  – znakowana kanałowa chwilowa szerokość pasma (w rad·Hz)  
 $B(t, \omega)$  – znakowana kanałowa chwilowa szerokość pasma (w hercach)  
 $B(t, \omega)$  – kanałowa chwilowa szerokość pasma (w hercach)  
 $\Omega(t, \omega)$  – kanałowa pulsacja chwilowa  
 $F(t, \omega)$  – kanałowa częstotliwość chwilowa  
 $Z(t, \omega)$  – lokalne zespolone opóźnienie grupowe  
 $\Theta(t, \omega)$  – lokalne opóźnienie grupowe (w rad·s)  
 $D(t, \omega)$  – lokalne opóźnienie grupowe (w sekundach)  
 $\mathcal{U}(t, \omega)$  – znakowany lokalny grupowy czas trwania (w rad·s)  
 $\mathcal{T}(t, \omega)$  – znakowany lokalny grupowy czas trwania (w sekundach)  
 $T(t, \omega)$  – lokalny grupowy czas trwania (w sekundach)  
 $E_{\vec{V}}(t, \omega)$  – gęstość energii w spektrogramie skoncentrowanym  
 $\vec{V}(t, \omega)$  – wektorowe pole przemieszczające  
 $\chi(t, \omega)$  – rozkład liczby stopni swobody  
 $\mathcal{R}(t, \omega)$  – kanałowa chwilowa szybkość świergotu  
 $R(t, \omega)$  – kanałowa chwilowa szybkość fazy

# Rozdział 1

## Wprowadzenie

### 1.1 Wstęp

„Pomiędzy czasem a częstotliwością” – to lapidarne hasło, zaczerpnięte z opracowania [42], dobrze oddaje charakter niniejszej rozprawy. Lecz by określić jej sedno należy sięgnąć głębiej – do dynamiki zespolonej fazy transformaty „ulożonej gdzieś pomiędzy czasem a częstotliwością” – krótkoczasowej transformaty Fouriera (STFT).

Rozważania zawarte w niniejszej rozprawie dotyczą, trudnej do empirycznego zbadania, dziedziny czas-częstotliwość. Gdy, przy uwzględnieniu prędkości propagacyjnej fali nośnej, czas można postrzegać przez pryzmat wymiaru geometrycznego, to już reprezentacje częstotliwościowe zwykle rozważa się za pomocą nietrywialnych aparatów matematycznych. Nie sposób jednak tych reprezentacji ignorować, zwłaszcza obserwując gwałtowny rozwój technologii opartych na algorytmach, przynajmniej w części, osadzonych w dziedzinie częstotliwości np. w telekomunikacji, radiolokacji.

W niniejszej pracy zaprezentowano aparat matematyczny operujący na zbiorze liczb zespolonych – tytułowy gradient składa się z **kanałowej zespolonej pulsacji chwilowej** oraz **lokalnego zespolonego opóźnienia grupowego**. Do znanej już zespolonej powierzchni reprezentującej transformatę STFT, „rozpiętej” nad płaszczyznę czas-częstotliwość, dodano dwie inne, również zespolone. Dynamika zespolonej fazy STFT jest tu przedstawiona jako źródło informacji na temat transformowanego sygnału; pozwala na jego wnikliwą analizę uwypuklając pewne cechy sygnału m. in. jego kanałową pulsację chwilową oraz lokalne opóźnienie grupowe. Ponadto zastosowanie odwracalnej transformaty – STFT, umożliwia przetwarzanie sygnału. Co więcej, aby odtworzyć tylko fragment sygnału wystarczy odwrócić odpowiadający mu fragment transformaty STFT, co umożliwi przetwarzanie sygnału w czasie rzeczywistym.

Zastosowanie pochodnych cząstkowych fazy STFT do oszacowania rozkładu energii sygnałów **niestacjonarnych** na płaszczyźnie czas-częstotliwość, zaproponowane w 1976 roku przez Koderę *et al.* w pionierskiej pracy [83], było rewolucyjnym posunięciem w stosunku do znanego od 1946 roku podejścia Gabora [59]. Innowacyjność tej propozycji przejawia się w zastosowaniu tzw. lokalnego opóźnienia grupowego (LGD) oraz kanałowej pulsacji chwilowej (CIF) do redystrybucji energii. W rezultacie można mówić o jej przemieszczeniu na płaszczyźnie czas-częstotliwość. Cechą charakterystyczną tej metody jest to, iż energia jest z reguły koncentrowana w centralnej części czasowo-częstotliwościowych reprezentacji komponentów sygnału. Termin komponent oznacza tu przebieg składowy o ciągłej fazie i amplitudzie chwilowej w czasie występowania komponentu; jego reprezentacja na płaszczyźnie czas-częstotliwość jest wyraźnie odseparowana od innych części składowych sygnału. Dokładna definicja komponentu sygnału będzie przedstawiona w dalszej części niniejszej pracy. Wielką zaletą metody proponowanej przez Koderę *et al.* jest fakt, iż umożliwia ona koncentrację energii komponentów zarówno o charakterze impulsowym jak i tych stacjonarnych. Lokalizacje, w których energia jest koncentrowana, utożsamia się z tzw. **atraktorami**. Od czasów Kodery publikacje na ten temat pojawiają się wręcz lawinowo: [82, 90, 122, 101, 92, 99, 91, 106, 89, 60, 100, 93, 94, 95, 96, 102, 97, 105, 98, 103, 104, 55, 57, 56, 58, 54, 50, 51, 53, 52, 46, 45, 1, 5, 4, 6, 7, 19, 23, 25, 24, 20, 21, 48, 22, 2, 3, 84, 33, 36, 29, 113, 26, 27, 131, 116, 107, 68, 134, 18, 84] – to tylko wybrane opracowania. Wystarczy do tego zbioru dołożyć wykaz książek popularno-naukowych opublikowanych w ostatnich kilkunastu latach, które dotyczą stricte lub poświęcają większe fragmenty wspomnianej tematyce: [133, 132, 127, 115, 110, 69, 28, 40, 44, 17], aby zorientować się, iż problematyka estymacji rozkładu energii sygnału w dziedzinie czas-częstotliwość jest nadal aktualna. Niewątpliwie kolejni autorzy wnoszą cenny wkład do popularyzacji wspomnianego zagadnienia, lecz znacząco zmienia się jedynie formalny zapis matematyczny, propozycje nowych praktycznych zastosowań oraz sposoby estymacji parametrów LGD i CIF. Na tym tle jaskrawo wyróżnia się Nelson [96] wraz z propozycją zastosowania pochodnych drugiego rzędu fazy STFT oraz Auger *et al.* [3], starając się rozwikłać zależności pomiędzy fazą, a amplitudą STFT. Niewątpliwie wartym uwagi opracowaniem jest również [49], gdzie Friedman stosuje pochodną logarytmiczną STFT. Wyjściem na przeciw tym trendom jest niniejsza praca, która wprowadza pojęcie zespolonej fazy STFT oraz jej dynamiki w kontekście wyznaczenia parametrów sygnału bazując na jego transformacie w dziedzinie czas-częstotliwość.

Pierwszych wzmianek na temat dynamiki zespolonej fazy sygnału, który jest graniczną formą STFT, należy doszukiwać się w pracy [85] opublikowanej w 1958 roku, a więc na długo przed Koderą *et al.* Autor: Linden wprowadza tam pojęcie tzw. zespolonej pulsacji chwilowej (ICF), która odzwierciedla dynamikę zespolonej fazy sygnału w czasie. Znaczący, udokumentowany wkład w badania na temat ICF mają polskie ośrodki naukowe, czego dowodem może być następujący wykaz publikacji: [63, 64, 67, 43, 14, 135, 138, 136, 72, 71, 70, 137, 111, 129, 77, 78, 79, 80].

W kontekście niniejszej pracy na szczególną uwagę zasługują artykuły [10, 11], w których Barnes, wprowadzając nie nazywa ICF po imieniu, to jednak wprowadza m. in. moduł jej czysto rzeczywistej części tzw. chwilową szerokość pasma (IBW). IBW jest przedstawiona jako moduł pochodnej logarytmicznej amplitudy sygnału względem czasu. O chwilowej szerokości pasma, w kontekście interesującym z punktu widzenia niniejszej rozprawy, pisali jeszcze wcześniej m. in. Cohen *et al.* [30] oraz Jones *et al.* [75]. Dualnym parametrem do ICF jest tzw. zespolone opóźnienie grupowe (CGD). CGD wyraża dynamikę zespolonej fazy transformaty Fouriera w dziedzinie częstotliwości. Istotnym spostrzeżeniem jest fakt, iż klasyczna transformata Fouriera jest drugą graniczną formą STFT. W opublikowanej literaturze popularno-naukowej pojęcie CGD praktycznie nie występuje. W prawdzie CGD pojawia się nawet w tytule opracowania [117], niemniej jest to wyjątek, a sam artykuł nie dotyka istoty tej rozprawy. Innym opracowaniem, w którym rozważana jest kwestia CGD są materiały dydaktyczne [119] – niestety jeszcze nie opublikowane w prasie popularno-naukowej. Pojęcia ICF jak i CGD są w niniejszej pracy rozszerzone i rozpatrywane w złączonej dziedzinie czas-częstotliwość jako odpowiednie pochodne cząstkowe zespolonej fazy STFT.

Rozważając zagadnienia analizy spektrograficznej, nie sposób pominąć Zasadę Nieoznaczoności Heisenberga, a konkretnie jej wersję dotyczącą rozkładów energii w dziedzinie czas-częstotliwość uzyskiwanych za pomocą transformacji Gabora [28, 62]; czasem zwanej też Ograniczeniem Gabora. W uproszczeniu Zasada ta mówi, iż nie można uzyskać dowolnie wysokiej rozdzielczości transformaty, gdyż jeżeli jej rozdzielczość w częstotliwości rośnie, to maleje ona w czasie i na odwrót. Wyboru rozdzielczości transformaty można dokonać przy pomocy odpowiedniej regulacji parametrów okna analizującego – szczególnie jego efektywnego czasu trwania. Istotnym skutkiem wspomnianej Zasady Nieoznaczoności jest niemożliwość określenia dokładnej lokalizacji energii sygnału oraz jego komponentów jednocześnie w czasie i częstotliwości. Uwidacznia się to np. w rozmyciu energii w spektrogramie klasycznym.

Aby odróżnić rozdzielczość zobrazowania zależną od liczby prążków transformaty lub liczby pikseli od rozdzielczości transformaty wynikającej z Zasady Nieoznaczoności do określenia tej ostatniej wprowadzono termin **nieozróżnialności**. Parametryzując tą wielkość dla okien analizujących określa się tzw. funkcje nieoznaczoności oraz obszary nieoznaczoności [130, 47, 76, 8]. Nawiązując do początku niniejszego rozdziału można stwierdzić, iż kształt obszaru oraz funkcji nieoznaczoności okna analizującego przybliży nieco orientację STFT „pomiędzy czasem a częstotliwością”. Im okno jest szersze tym jego funkcja nieoznaczoności, ma większy zasięg efektywny w czasie i na odwrót, im okno jest węższe tym jego funkcja nieoznaczoności ma większy zasięg efektywny w częstotliwości – ponieważ okno analizujące może być traktowane jako prototyp filtra wąskopasmowego to jego zasięg w częstotliwości jest uzależniony od efektywnej szerokości kanału na wyjściu filtra. Jedną z estymat funkcji nieoznaczoności może być m. in. rozkład Rihaczka obliczony dla jednomodowego okna analizującego, który jest opisany

następującym wzorem [118]:

$$\epsilon(t, \omega) = h(t)H^*(\omega) \exp(-j\omega t); \quad h(t), H(\omega), \epsilon(t, \omega) \in \mathbb{C}, \quad (1.1)$$

gdzie  $h(t)$  oznacza odpowiedź impulsową okna analizującego,  $H^*(\omega)$  jej sprzężone widmo, natomiast  $\exp()$  funkcję eksponencjalną. Jednostka urojona, oznaczona symbolem  $j$ , spełnia równość:  $j^2 = -1$ . W podejściu Rihaczka energia sygnału jest postrzegana przez pryzmat rozkładu wartości zespolonych, podobnie jak to ma miejsce w STFT.

Podejście Kodery *et al.* pokazało, że z negatywnymi skutkami wynikającymi z Zasady Nieoznaczoności, m. in. powodującymi **przeciek** energii w spektrogramie klasycznym, można skutecznie walczyć. Szczególnie w sytuacji, gdy analizowane są tzw. sygnały **rzadko rozłożone**, których reprezentacje komponentów w dziedzinie czas-częstotliwość są wyraźnie od siebie odseparowane. Uściślając ich obszary nieoznaczoności są rozłączne. W sytuacji, gdy komponenty znajdują się dostatecznie blisko siebie, ich rozmycie powoduje, iż przestają być rozróżnialne w dziedzinie czas-częstotliwość. Ma to swoje odzwierciedlenie zarówno w rozkładzie energii jak również w wartościach fazy STFT, przez co uniemożliwia wyznaczenie kanałowej pulsacji chwilowej oraz lokalnego opóźnienia grupowego komponentów tak, jakby komponenty były analizowane niezależnie.

Najwięcej problemów w estymacji CIF i LGD sprawiają te komponenty, których reprezentacje w dziedzinie czas-częstotliwość w miejscu spotkania miałyby podobny poziom amplitudy. Wtedy zarówno estymaty CIF jak i LGD mogą osiągać duże wartości bezwzględne włącznie z nieskończonością. Skutkuje to tym, iż redystrybucja zaproponowana przez Koderę *et al.* w takich miejscach płaszczyzny czas-częstotliwość spowoduje rozproszenie energii. Z analizy tego zjawiska wynika, iż występuje ono lokalnie i ma praktyczne znaczenie tylko jeżeli gęstość energii w takim miejscu płaszczyzny czas-częstotliwość ma znaczącą wartość. Zasada Nieoznaczoności ma szerszy wydźwięk np. w klasycznej radiokomunikacji skutkuje ona takimi szkodliwymi zjawiskami jak, interferencje międzykanałowe i między-symbolowe wprowadzane na kutek przetwarzania sygnału. Dlatego tym ważniejsze są badania mające na celu zneutralizowanie negatywnych skutków omawianych tu zjawisk.

Drugą główną częścią niniejszej rozprawy jest rozwinięcie prac Nelsona związanych z klasyfikacją komponentów sygnału. Nelson zastosował drugą mieszaną pochodną fazy STFT do separacji składników impulsowych od składników stacjonarnych [96]. Interpretacja algorytmu zaproponowanego przez Nelsona nie jest jasna, dlatego w tezach niniejszej pracy stwierdzono, iż możliwa jest, nie tylko binarna klasyfikacja, ale ilościowe oszacowanie przyspieszenia fazy poszczególnych komponentów sygnału. W wyniku działania zaproponowanych w niniejszej pracy metod każdemu prążkowi STFT zostaje przyporządkowana odpowiadająca mu wartość tego przyspieszenia, przez co dekompozycja sygnału na jego składowe szybko- i wolnozmiennie, uwzględniając odwracalność STFT, wydaje się być tylko kwestią odpowiedniej implementacji.



Podsumowując przegląd literatury, odzwierciedlający obecny stan wiedzy, można odnieść wrażenie, iż pojęcie CGD jest zmarginalizowane, natomiast znaczenie dynamiki zespolonej fazy STFT jest niedoceniane. Ponadto, zakłada się, iż znany aparat matematyczny, zaproponowany przez Kodereę *et al.*, dotyczący redystrybucji energii na płaszczyźnie czas-częstotliwość, można uzupełnić, stosując opis w zbiorze liczb zespolonych. Tezy niniejszej pracy zostały sformułowane również w celu naświetlenia tego aspektu oraz udowodnienia przydatności wspomnianych zespolonych reprezentacji dynamicznych w kontekście detekcji i przetwarzania sygnałów.

## 1.2 Tezy pracy

### Teza 1

Na podstawie gradientu zespolonej fazy krótkoczasowej transformaty Fouriera możliwe jest zwiększenie koncentracji energii spektrogramu klasycznego przy jednoczesnym zachowaniu informacji o lokalizacji tzw. atraktorów na płaszczyźnie czas-częstotliwość.

### Teza 2

Na podstawie gradientu zespolonej fazy krótkoczasowej transformaty Fouriera możliwe jest oszacowanie akcelerogramu fazy chwilowej poszczególnych komponentów sygnału w dziedzinie czas-częstotliwość.

## 1.3 Przegląd rozdziałów

Niniejsza rozprawa składa się z czterech zasadniczych rozdziałów i podsumowania. W rozdziale pierwszym dokonano krótkiego wprowadzenia w tematykę niniejszej rozprawy, dokonano przeglądu literatury dotyczącego prezentowanej tematyki oraz określono cele i dwie tezy, które udowodniono na łamach niniejszej pracy.

W rozdziale drugim dokonano przeglądu wybranych metod analizy sygnałów. Wyróżniono trzy główne grupy: metody implementowane w dziedzinie czasu, w dziedzinie częstotliwości oraz w dziedzinie czas-częstotliwość. Przedstawiono m. in. definicje zespolonej fazy chwilowej (ICP), zespolonej pulsacji chwilowej (ICF) oraz zespolonego opóźnienia grupowego (CGD). Ponadto przedstawiono klasyczne interpretacje krótkoczasowej transformacji Fouriera; którą oznaczono skrótowo

przez  $STFT_{\Omega}$  dla odróżnienia od krótkoczasowej transformaty Fouriera (w skrócie STFT). Przypominano definicje spektrogramu oraz jego rozkładów brzegowych. A także zdefiniowano tzw. indeks koncentracji energii (ECI), który stosowano w niniejszej pracy do uzasadnienia wyboru parametrów okna analizującego – szczególnie jego efektywnej szerokości.

W rozdziale trzecim przypominano metodę zaproponowaną przez Koderę *et al.* i nazwaną oryginalnie ang. *Modified Moving Window Method*. Wprowadzono pojęcia kanałowej pulsacji chwilowej (CIF), lokalnego opóźnienia grupowego (LGD) oraz wektorowego pola przemieszczającego (MVF). Przedstawiono sposób estymacji energii sygnału na płaszczyźnie czas-częstotliwość po dokonaniu jej przemieszczenia na podstawie CIF oraz LGD. W drugiej części tego rozdziału sformułowano definicję gradientu zespolonej fazy STFT. Ponieważ tytułowy gradient składa się z zespolonej kanałowej pulsacji chwilowej (CICF) oraz zespolonego lokalnego opóźnienia grupowego (CLGD), zaprezentowano również ich definicję.

W rozdziale czwartym wprowadzono nowe reprezentacje sygnału w dziedzinie czas-częstotliwość, które stanowią dowód postawionych w niniejszej pracy tez. Teza pierwsza została udowodniona przez wprowadzenie tzw. atraktogramu, czyli graficznej reprezentacji, na której zaznaczono lokalizację poszczególnych komponentów sygnału, wraz z zachowaniem informacji o poziomie ich energii w tym miejscu płaszczyzny czas-częstotliwość. Druga teza została udowodniona poprzez zdefiniowanie tzw. akcelerogramu kanałowej fazy chwilowej sygnału, który graficznie przedstawia przyspieszenie lub spowolnienie faz chwilowych poszczególnych komponentów sygnału również na płaszczyźnie czas-częstotliwość.

## Rozdział 2

# Przegląd wybranych koncepcji analizy sygnałów

### 2.1 Analiza w dziedzinie czasu

Sygnał analityczny jest szczególną zespoloną transformatą sygnału rzeczywistego; jest również nazywany równoważnikiem analitycznym sygnału rzeczywistego. Sygnał analityczny można obliczyć m. in. według następującego wzoru:

$$u(t) = x(t) + jy(t); \quad x(t), y(t) \in \mathbb{R}; \quad u(t) \in \mathbb{C}, \quad (2.1)$$

gdzie  $x(t)$  jest transformowanym sygnałem rzeczywistym,  $y(t)$  transformatą Hilberta sygnału  $x(t)$ , obliczony sygnał analityczny oznaczono jako  $u(t)$ , natomiast  $j$  to jednostka urojona. Transformacja Hilberta jest operacją przekształcającą sygnał w jego inną reprezentację opisaną w czasie [73]. Znając sygnał analityczny można stosunkowo prosto odtworzyć bazowy sygnał rzeczywisty – obliczając część rzeczywistą jego równoważnika analitycznego:

$$x(t) = \operatorname{re}(u(t)), \quad (2.2)$$

gdzie  $\operatorname{re}()$  oznacza funktor obliczający część rzeczywistą liczby zespolonej.

Powodem, dla którego stosuje się równoważniki analityczne sygnałów rzeczywistych, są właściwości ich widm oraz, co się z tym wiąże, występowanie nieoznaczoność typu faza–amplituda [112, 123, 31, 86]. Widmo każdego sygnału analitycznego przyjmuje wartości zerowe dla wszystkich ujemnych częstotliwości, gdy tymczasem widmo sygnału rzeczywistego jest ulokowane symetrycznie wokół zera. Na podstawie równoważnika analitycznego można oszacować m. in. przebieg pulsacji chwilowej, co zostanie przedstawione w dalszej części niniejszej pracy. Zagadnienie sygnału analitycznego oraz transformacji Hilberta nie jest głównym wątkiem tej rozprawy, dlatego nie jest tu szczegółowo omówione. Jest natomiast

szeroko opisane w literaturze popularno-naukowej np. [66, 13, 135]. W dalszej części niniejszej rozprawy będą rozpatrywane tylko sygnały zespolone, natomiast jeżeli wystąpi potrzeba rozważania sygnału rzeczywistego, to będzie się to odbywało na podstawie jego równoważnika analitycznego.

Każdy sygnał zespolony można przedstawić graficznie na zespolonej płaszczyźnie Gaussa, traktując jego składowe: rzeczywistą i urojoną, jako współrzędne kartezjańskie (2.1). Wektor ulokowany w początku układu współrzędnych i wskazujący punkty określone przez współrzędne  $x(t)$  i  $y(t)$  kreśli linię krzywą wraz z upływem czasu – taki sposób prezentacji sygnału nosi nazwę diagramu Arganda.

Z pojęciem sygnału analitycznego ściśle jest powiązane zagadnienie amplitudy chwilowej, zwanej również obwiednią sygnału. Jest to obok fazy i pulsacji chwilowej jedna z podstawowych reprezentacji sygnału [125, 65, 121, 124, 74]. Każdy sygnał zespolony można przedstawić w postaci biegunowej według następującego wzoru:

$$u(t) = a(t) \exp(j\varphi(t)); \quad a(t), \varphi(t) \in \mathbb{R}; \quad a(t) \geq 0. \quad (2.3)$$

Wtedy  $a(t)$  oznacza amplitudę chwilową sygnału, natomiast  $\varphi(t)$  reprezentuje fazę chwilową. Amplituda chwilowa może być obliczona na podstawie modułu sygnału zespolonego:

$$a(t) = |u(t)|. \quad (2.4)$$

W odniesieniu do sygnałów pasmowych odnosi się pojęcie tzw. obwiedni zespolonej, czyli równoważnika dolnopasmowego sygnału zespolonego. Czasem stosuje się także tzw. logobiednię sygnału, która jest logarytmem naturalnym amplitudy chwilowej:

$$\lambda(t) = \text{Ln}(|u(t)|) = \text{Ln}(a(t)); \quad \lambda(t) \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Inną reprezentacją sygnału jest faza chwilowa [109]; za pomocą następującego wzoru można obliczyć fazę chwilową główną, która przyjmuje wartości ze zbioru  $\langle -\pi, \pi \rangle$ :

$$\varphi_p(t) = \text{Arg}(u(t)); \quad \varphi_p(t) \in \mathbb{R}; \quad \varphi_p(t) \in \langle -\pi, \pi \rangle. \quad (2.6)$$

Funktor  $\text{Arg}()$  jest bezinercyjny, zależy tylko od aktualnej wartości sygnału zespolonego  $u(t)$ , w odróżnieniu od operatora fazy chwilowej, zdefiniowanej następująco:

$$\varphi(t) = \arg\{u(t)\} = \varphi_p(t) + 2\pi n(t); \quad n(t) \in \mathbb{I}, \quad (2.7)$$

gdzie  $n(t)$  wyraża całkowitą liczbę obrotów wektora kreślącego diagram Arganda analizowanego sygnału na płaszczyźnie Gaussa, z uwzględnieniem kierunku obrotu. Wynik pochodzący z operatora  $\arg\{\}$  w każdej chwili czasu zależy od fazy początkowej i całego dotychczasowego przebiegu sygnału.

W niniejszej pracy wiele miejsca poświęca się analizie tzw. sygnałów wieloskładnikowych, dlatego poniżej sprecyzowano definicję takiego sygnału:

$$u_N(t) = \sum_{n=1}^N a_n(t) \exp(j\varphi_n(t)), \quad (2.8)$$

gdzie  $N = 2, 3, 4, \dots$   $u_N(t)$  reprezentuje sygnał składający się z  $N$  komponentów,  $a_n(t)$  i  $\varphi_n(t)$  oznaczają ciągle w przedziale występowania komponentu amplitudę chwilową i fazę chwilową  $n$ -tego komponentu. Gdy  $N = 1$  sygnał jest nazywany jednoskładnikowym. Osobną grupę stanowią sygnały szumowe, które składają się przeważnie z bardzo wielu gęsto ulokowanych i stosunkowo krótkich komponentów. Każdy sygnał zarejestrowany w środowisku naturalnym występuje w obecności szumu (np. szum akustyczny, elektromagnetyczny, termiczny, kwantyzacji itd.).

Uogólnieniem fazy chwilowej jest zespolona faza chwilowa (ICP), która jest definiowana jako logarytm naturalny sygnału zespolonego w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
 \Phi(t) &= \ln \{u(t)\} = \\
 &= \ln \left\{ a(t) \exp(j\varphi(t)) \right\} = \\
 &= \ln \{a(t)\} + \ln \left\{ \exp(j\varphi(t)) \right\} = \\
 &= \text{Ln}(a(t)) + \ln \left\{ \exp(j\varphi(t)) \right\} = \\
 &= \lambda(t) + j\varphi(t); \quad \Phi \in \mathbb{C},
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

gdzie  $\ln\{\}$  jest operatorem; uogólnieniem logarytmu na liczby zespolone. Przebieg ICP zawiera kompletną informację o sygnale, tzn. przebieg amplitudy i fazy, może on być bezstratnie odtworzony na podstawie tej reprezentacji. Z wyprowadzenia (2.9) wynika, iż część rzeczywista ICP, zwana również składową promieniową, stanowi logobwiednię sygnału:

$$\lambda(t) = \text{re}(\Phi(t)) = \text{re}(\ln \{u(t)\}), \tag{2.10}$$

natomiast część urojona ICP, zwana też składową kątową, wyraża fazę chwilową sygnału:

$$\varphi(t) = \text{im}(\Phi(t)) = \text{im}(\ln \{u(t)\}). \tag{2.11}$$

Inną, mającą wiele zastosowań, reprezentacją sygnału zespolonego w czasie jest pulsacja chwilowa (IF) [15, 10, 61]. IF definiuje się jako pochodną fazy chwilowej względem czasu:

$$\Omega(t) = \frac{d}{dt}\varphi(t); \quad \Omega(t) \in \mathbb{R}, \tag{2.12}$$

gdzie  $\Omega(t)$  oznacza pulsację chwilową wyrażoną w radianach na sekundę. W praktyce częściej posługuje się pojęciem częstotliwości chwilowej wyrażonej w hercach:

$$F(t) = \frac{\Omega(t)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt}\varphi(t); \quad F(t) \in \mathbb{R}. \tag{2.13}$$

W opracowaniach anglojęzycznych częstotliwość chwilowa jest tłumaczona jako *instantaneous frequency*, natomiast do określenia terminu pulsacja chwilowa, dla

odróżnienia, stosuje się nazwę *instantaneous angular frequency*. Stosując przebieg  $\Omega(t)$ , który wyraża zmianę fazy w czasie (2.7), można w następujący sposób zdefiniować fazę chwilową:

$$\varphi(t) = \arg \{u(t)\} = \int_0^t \Omega(\tau) d\tau + \varphi(0). \quad (2.14)$$

Zmianę częstotliwości chwilowej w czasie opisuje druga pochodna fazy sygnału względem czasu; przebieg ten jest znany w literaturze anglojęzycznej pod nazwą *instantaneous chirp rate* (ICR) [108, 41]:

$$R(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d^2}{dt^2} \varphi(t); \quad R(t) \in \mathbb{R}. \quad (2.15)$$

Kolejną omawianą reprezentacją sygnału w czasie, istotną z punktu widzenia tej rozprawy, jest chwilowa szerokość pasma (IBW). W literaturze, np. [10], IBW jest zdefiniowana jako moduł pochodnej logarytmicznej obwiedni sygnału względem czasu. W klasycznym podejściu szerokość, podobnie jak odległość, jest zawsze wartością dodatnią, co jest w pełni zrozumiałe i powszechnie akceptowane. Jednak takie podejście powoduje utratę części informacji o sygnale, dlatego w niniejszej pracy przedstawiono uogólnienie IBW jakim jest tzw. znakowana chwilowa szerokość pasma (SIBW). Reprezentację tą można zdefiniować na podstawie logobwiedni sygnału następująco:

$$\Sigma(t) = \frac{d}{dt} \lambda(t); \quad \Sigma(t) \in \mathbb{R}, \quad (2.16)$$

gdzie  $\Sigma(t)$ , podobnie jak  $\Omega(t)$ , jest wyrażona w rad/s. SIBW można również wyrazić w hercach, wtedy oblicza się ją następująco:

$$B(t) = \frac{\Sigma(t)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \lambda(t); \quad B(t) \in \mathbb{R}. \quad (2.17)$$

Jej moduł reprezentuje zawsze dodatnią IBW, również mianowaną w hercach:

$$B(t) = |B(t)|; \quad B(t) \in \mathbb{R}; \quad B(t) \geq 0. \quad (2.18)$$

Zdefiniowanie SIBW jako autonomicznej reprezentacji sygnału, mającej jednoznaczna interpretację fizyczną, skutkuje formalnym uzupełnieniem znanego aparatu matematycznego. SIBW zawiera, poza informacją o chwilowej szerokości pasma, również wiadomość czy amplituda sygnału w danej chwili narasta czy opada. Co może być istotne z punktu widzenia użytkownika i zarządzania pasmem, np. fizycznymi kanałami częstotliwościowymi w systemach radiokomunikacyjnych.

### 2.1.1 Zespolona pulsacja chwilowa

Zespolona pulsacja chwilowa (ICF) jest reprezentacją sygnału zawierającą informację jednocześnie o IF oraz SIBW [85]; definiuje się ją jako pochodną ICP względem czasu:

$$\begin{aligned}
 S(t) &= \frac{d}{dt} \Phi(t) = \\
 &= \frac{d}{dt} \ln \{u(t)\} = \\
 &= \frac{d}{dt} \ln \{a(t) \exp(j\varphi(t))\} = \\
 &= \frac{d}{dt} \left\{ \ln \{a(t)\} + \ln \{ \exp(j\varphi(t)) \} \right\} = \\
 &= \frac{d}{dt} \{ \lambda(t) + j\varphi(t) \} = \frac{d}{dt} \lambda(t) + j \frac{d}{dt} \varphi(t) = \\
 &= \Sigma(t) + j\Omega(t) = 2\pi B(t) + j2\pi F(t); \quad S(t) \in \mathbb{C}.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Z wyprowadzenia (2.19) można wywnioskować, iż składową rzeczywistą ICF stanowi SIBW wyrażona w radianach na sekundę:

$$\Sigma(t) = 2\pi B(t) = \operatorname{re}(S(t)), \tag{2.20}$$

natomiast część urojona reprezentuje przebieg IF [75, 15, 16, 11]:

$$\Omega(t) = 2\pi F(t) = \operatorname{im}(S(t)). \tag{2.21}$$

Zatem obydwa wyszczególnione składniki mają to samo miano: radiany na sekundę, co świadczy, iż mają ten sam sens fizyczny – pulsację. Stanowi to podstawę traktowania ich jako jedną zespoloną reprezentację sygnału. Zapis taki wydaje się szczególnie trafny dla następującej definicji ICF:

$$\begin{aligned}
 S(t) &= \Sigma(t) + j\Omega(t) = \\
 &= \frac{d\lambda(t)}{dt} + j \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{d \ln \{a(t)\}}{dt} + j \frac{d\varphi(t)}{dt} = \\
 &= \frac{1}{a(t)} \frac{da(t)}{dt} + j \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{1}{a(t)} \left( \frac{da(t)}{dt} + ja(t) \frac{d\varphi(t)}{dt} \right) = \\
 &= \frac{1}{a(t) \exp(j\varphi(t))} \left( \exp(j\varphi(t)) \frac{da(t)}{dt} + ja(t) \exp(j\varphi(t)) \frac{d\varphi(t)}{dt} \right) = \\
 &= \frac{1}{a(t) \exp(j\varphi(t))} \frac{d}{dt} \left\{ a(t) \exp(j\varphi(t)) \right\} = \\
 &= \frac{1}{u(t)} \frac{du(t)}{dt}.
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Na podstawie wyprowadzenia (2.22), w wyszukany i jednocześnie lapidarny sposób, zdefiniowano ICF jako pochodną sygnału względem czasu podzieloną przez przebieg tego sygnału.

## 2.2 Analiza w dziedzinie częstotliwości

Jedną z najbardziej rozpowszechnionych metod analizy sygnałów stacjonarnych w dziedzinie częstotliwości jest transformacja Fouriera [9, 17]. Wynik transformacji, czyli transformata Fouriera, jest w ogólności zespoloną reprezentacją sygnału. Transformata jest również często określana jako widmo Fouriera. Jej definicję wyraża następujący wzór:

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \exp(-j\omega t) dt. \quad (2.23)$$

Widmo oznaczono wielką literą  $U(\omega)$  dla odróżnienia go od przebiegu sygnału  $u(t)$ . Ponieważ jest ono zespolone, można je wyrazić za pomocą wzoru Eulera:

$$U(\omega) = A(\omega) \exp(j\phi(\omega)); \quad A(\omega), \phi(\omega) \in \mathbb{R}; \quad A(\omega) \geq 0, \quad (2.24)$$

gdzie  $A(\omega)$  oznacza widmo amplitudowe, zwane też periodogramem, natomiast  $\phi(\omega)$  widmo fazowe. Zarówno  $A(\omega)$ , jak i  $\phi(\omega)$ , są reprezentacjami rzeczywistymi. W praktyce widmo amplitudowe często przedstawia się w skali logarytmicznej np. w neperach:

$$\Lambda(\omega) = \text{Ln}(A(\omega)) = \text{Ln}(|U(\omega)|); \quad \Lambda(\omega) \in \mathbb{R}. \quad (2.25)$$

Podobnie jak każdy sygnał zespolony za pomocą ICP (2.9), również transformata Fouriera może być wyrażona jako tzw. zespolona faza transformaty Fouriera, następująco:

$$\begin{aligned} \Psi(\omega) &= \ln \{U(\omega)\} = \\ &= \ln \{A(\omega) \exp(j\phi(\omega))\} = \\ &= \ln \{A(\omega)\} + \ln \{\exp(j\phi(\omega))\} = \\ &= \Lambda(\omega) + j\phi(\omega). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Transformacja Fouriera jest operacją odwracalną. Co z punktu widzenia przetwarzania sygnałów jest cechą kluczową. Przepis odwrotnej transformacji Fouriera wygląda następująco:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) \exp(j\omega t) d\omega. \quad (2.27)$$



W niniejszej rozprawie odwracalność proponowanych transformacji determinuje możliwość separacji składników sygnału w dziedzinie czasu. Zatem wybór rozpatrywanych metod analizy sygnału został zawężony do przekształceń odwracalnych; chociaż popularne nie są tu rozpatrywane, m. in. reprezentacje Wignera [128].

### 2.2.1 Zespólone opóźnienie grupowe

Fakt, iż widmo fourierowskie jest odwracalne, niesie ze sobą potrzebę zachowania informacji o zależnościach czasowych wszystkich składowych sygnału. Najprostszym sposobem na ich odtworzenie wprost z widma jest obliczenie opóźnienia grupowego (GD). GD definiuje się jako pochodną fazy transformaty Fouriera względem częstotliwości:

$$\Theta(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \arg \{U(\omega)\} = -\frac{d}{d\omega} \phi(\omega); \quad \Theta(\omega) \in \mathbb{R}, \quad (2.28)$$

gdzie  $\Theta(\omega)$  oznacza GD wyrażone w jednostkach: sekunda razy radian [rad·s], natomiast GD mianowane w sekundach zdefiniowano następująco:

$$D(\omega) = \frac{\Theta(\omega)}{2\pi} = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{d\omega} \arg \{U(\omega)\} = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{d\omega} \phi(\omega); \quad D(\omega) \in \mathbb{R}. \quad (2.29)$$

Zarówno  $\Theta(\omega)$  jak i  $D(\omega)$  przyjmują wartości ze zbioru liczb rzeczywistych, obie reprezentacje dedykowane są do analizy sygnałów stacjonarnych.

Dualną reprezentacją sygnału do ICF jest tzw. zespolone opóźnienie grupowe (CGD), które jest mianowane w rad·s. Zdefiniowane według wzoru (2.28) GD jest częścią urojoną CGD:

$$\Theta(\omega) = \text{im} (Z(\omega)). \quad (2.30)$$

Natomiast składową rzeczywistą CGD stanowi tzw. znakowany grupowy czas trwania (SGDR):

$$\mathcal{U}(\omega) = \text{re} (Z(\omega)), \quad (2.31)$$

gdzie  $Z(\omega)$  reprezentuje CGD oraz  $\mathcal{U}(\omega)$  oznacza SGDR. SGDR może być zdefiniowany jako pochodna logarytmiczna widma amplitudowego w następujący sposób:

$$\mathcal{U}(\omega) = \frac{d}{d\omega} \Lambda(\omega); \quad \mathcal{U}(\omega) \in \mathbb{R}, \quad (2.32)$$

gdzie  $\Lambda(\omega)$  oznacza logarytm naturalny amplitudy transformaty Fouriera zdefiniowany wcześniej według wzoru (2.25). SGDR mianowany w sekundach definiuje się następująco:

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{\mathcal{U}(\omega)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{d\omega} \Lambda(\omega); \quad \mathcal{F}(\omega) \in \mathbb{R}. \quad (2.33)$$

Podobnie jak SIBW, przekreślenie symbolu  $\mathcal{F}(\omega)$  wprowadzono dla odróżnienia od, zawsze nieujemnego, wyrażonego w sekundach, grupowego czasu trwania (GDR):

$$T(\omega) = |\mathcal{F}(\omega)|; \quad T(\omega) \in \mathbb{R}; \quad T(\omega) \geq 0. \quad (2.34)$$

Nazwa GDR została wprowadzona aby zachować analogię do GD. W pracy [118] Rihaczek nazwał podobnie zdefiniowaną wielkość czasem relaksacji.

CGD zdefiniowane jako pochodna zespolonej fazy transformaty Fouriera względem częstotliwości przyjmuje ona następującą postać:

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \frac{d}{d\omega} \Psi(\omega) = \\ &= \frac{d}{d\omega} \ln \{U(\omega)\} = \\ &= \frac{d}{d\omega} \ln \{A(\omega) \exp(j\phi(\omega))\} = \\ &= \frac{d}{d\omega} \left\{ \ln \{A(\omega)\} + \ln \{ \exp(j\phi(\omega)) \} \right\} = \\ &= \frac{d}{d\omega} \{ \Lambda(\omega) + j\phi(\omega) \} = \frac{d}{d\omega} \Lambda(\omega) + j \frac{d}{d\omega} \phi(\omega) = \\ &= \mathcal{U}(\omega) - j\Theta(\omega) = 2\pi\mathcal{F}(\omega) - j2\pi D(\omega); \quad Z(\omega) \in \mathbb{C} \end{aligned} \quad (2.35)$$

lub analogicznie jak dla dualnej ICF, przekształcenia (2.22) można powtórzyć w nieco zmodyfikowanej formie dla CGD:

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \mathcal{U}(\omega) - j\Theta(\omega) = \\ &= \frac{d\Lambda(\omega)}{d\omega} + j \frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = \frac{d \ln \{A(\omega)\}}{d\omega} + j \frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = \\ &= \frac{1}{A(\omega)} \frac{dA(\omega)}{d\omega} + j \frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{A(\omega)} \left( \frac{dA(\omega)}{d\omega} + jA(\omega) \frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \right) = \\ &= \frac{1}{A(\omega) \exp(j\phi(\omega))} \left( \exp(j\phi(\omega)) \frac{dA(\omega)}{d\omega} + jA(\omega) \exp(j\phi(\omega)) \frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \right) = \\ &= \frac{1}{A(\omega) \exp(j\phi(\omega))} \frac{d}{d\omega} \left\{ A(\omega) \exp(j\phi(\omega)) \right\} = \frac{1}{U(\omega)} \frac{dU(\omega)}{d\omega}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

W efekcie otrzymano zwięzłą definicję CGD, jako stosunek pochodnej widma Fouriera względem częstotliwości do transformaty Fouriera. Obie składowe CGD, GD oraz SGDR, mają wymiar czasu i są wyrażone tych samych jednostkach: [rad·s].

Transformacja Fouriera i powiązany z nią kalkulator zespolonego opóźnienia grupowego (2.35) to metody, analizy sygnałów w dziedzinie częstotliwości, dotyczące stricte tej rozprawy. Wybór dostępnych metod jest dużo większy, ale nie będą one omawiane, ze względu na ograniczone ramy niniejszego opracowania.

## 2.3 Analiza w dziedzinie czas-częstotliwość

W niniejszej pracy założono, że sygnał jest jednoznacznie reprezentowany w dziedzinie czas-częstotliwość za pomocą pewnej struktury. Strukturę tę można

utożsamiać z idealnym modelem sygnału w rozpatrywanej dziedzinie. Kształt tej struktury jest w głównej mierze zależny od źródła sygnału oraz właściwości ośrodka w jakim sygnał się propagował. Medium transmisyjne odpowiada za sposób tłumienia sygnału, jego dyspersję oraz interferencje własne. Metody analizy spektrograficznej przedstawione w niniejszej rozprawie są estymatorami pozwalającymi przybliżyć kształt wspomnianej struktury. Wprowadzanie nowych estymatów rozkładu energii oraz innych parametrów sygnału w dziedzinie czas-częstotliwość ma na celu coraz dokładniejsze poznanie idealnego modelu sygnału.

W poprzednim paragrafie wspomniano, iż transformacja Fouriera jest przeznaczona głównie do analizy sygnałów stacjonarnych; to znacznie ogranicza możliwości praktycznego zastosowania tej transformacji. Wprawdzie stosuje się wybiegi mające na celu złagodzenie negatywnych skutków analizy fourierowskiej, gdy analizowane sygnały są niestacjonarne, takie jak okienkowanie czy przycinanie sygnału. To jednak do analizy sygnałów niestacjonarnych w dziedzinie czas-częstotliwość powinno się stosować inne, adekwatne, metody. Popularnymi metodami są transformacje Gabora [59], gdzie dokonuje się dekompozycji sygnału na tzw. funkcje bazowe. Funkcje bazowe uzyskuje się z funkcji prototypowej, zwanej niekiedy atomem Gabora, poprzez opóźnianie oraz modulację. Transformata Gabora to zbiór uporządkowanych współczynników skojarzonych ze wspomnianymi funkcjami bazowymi. Funkcje bazowe w dziedzinie czas-częstotliwość mają kształt funkcji nieoznaczoności omawianych m. in. we wstępie do niniejszej rozprawy. Transformacje Gabora mają kilka zalet, które kwalifikują je jako uniwersalne narzędzie analizy sygnałów niestacjonarnych w dziedzinie czas-częstotliwość, należą do nich m. in. to iż, są liniowe oraz odwracalne, funkcje nieoznaczoności wszystkich funkcji bazowych mają ten sam kształt, co dla dyskretnych wersji transformat determinuje identyczne rozmiary wszystkich komórek czasowo-częstotliwościowych, i wreszcie brak artefaktów będących produktami oddziaływań różnych części tego samego sygnału ze sobą nawzajem (ang. *cross-terms*), które utrudniają właściwą interpretację transformat.

Jedną z transformacji, która należy do rodziny transformacji Gabora, jest, wspomniana już we wstępie,  $STFT_{\Omega}$ . W tej transformacji rolę funkcji prototypowej pełni okno analizujące, stąd anglojęzyczna nazwa *Moving Window Method*. W praktyce stosuje się okna analizujące kształtem zbliżone do impulsu Gaussa, ale ograniczone w czasie np. okno Hamminga, okno Blackmana-Harrisa.  $STFT_{\Omega}$  może być zdefiniowana następująco:

$$U(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau + t)h(-\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau; \quad U(t, \omega), h(\tau) \in \mathbb{C}, \quad (2.37)$$

gdzie  $h(\tau)$  oznacza odpowiedź impulsową okna analizującego.  $U(t, \omega)$  reprezentuje  $STFT$ , która w ogólności jest zespolona:

$$U(t, \omega) = A(t, \omega) \exp(j\phi(t, \omega)); \quad A(t, \omega), \phi(t, \omega) \in \mathbb{R}; \quad A(t, \omega) \geq 0, \quad (2.38)$$

gdzie  $A(t, \omega)$  oznacza amplitudę STFT, zaś  $\phi(t, \omega)$  fazę STFT; obie te reprezentacje są rzeczywiste. Podobnie jak transformata Fouriera (2.26), tak i STFT może być opisana, za pomocą zespolonej fazy STFT, następująco:

$$\Psi(t, \omega) = \ln \{U(t, \omega)\} = \Lambda(t, \omega) + j\phi(t, \omega), \quad (2.39)$$

gdzie  $\Lambda(t, \omega)$  oznacza amplitudę STFT wyrażoną w neperach. Wyprowadzenie tej zależności jest analogiczne do (2.26), dlatego nie jest tu prezentowane. Odwrotna transformacja może być zdefiniowana według poniższego wzoru:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi h(t)} \int_{-\infty}^{\infty} U(t, \omega) \exp(j\omega t) d\omega, \quad (2.40)$$

gdzie żaden współczynnik okna nie może być równy zero. W pracy [89] przedstawiono inny sposób resyntezy sygnału:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi h(0)} \int_{-\infty}^{\infty} U(t, \omega) d\omega, \quad h(0) \neq 0. \quad (2.41)$$

Ten przepis jest bardziej efektywny w sytuacji, gdy istnieje potrzeba obliczenia wartości sygnału tylko w wybranych chwilach czasu. W tej samej pracy zaproponowano również sposób obliczenia widma sygnału w dziedzinie częstotliwości na podstawie jego STFT:

$$U(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} U(t, \omega) \exp(-j\omega t) dt. \quad (2.42)$$

Możliwość tak swobodnych, i jednocześnie efektywnych, przekształceń, jak (2.41) oraz (2.42), podnosi atrakcyjność STFT<sub>Ω</sub> w kontekście przetwarzania sygnału.

Jedną z interpretacji dyskretnej w częstotliwości wersji STFT<sub>Ω</sub> jest bank filtrów wąskopasmowych. W przekrojach STFT, wzdłuż osi czasu, są wydzielone kanały częstotliwościowe, których częstotliwości środkowe odpowiadają pasmom filtrów wąskopasmowych. Ciągła w częstotliwości STFT jest tu formą graniczną, gdzie odległości pomiędzy środkowymi częstotliwościami sąsiednich kanałów zmierzają do zera, natomiast liczba filtrów w strukturze zwiększa się do nieskończoności. Analizowany sygnał jest poddawany demultipleksacji na wiele strumieni, których liczba jest równa liczbie filtrów w strukturze banku. Energia strumieni ulokowana jest we wspomnianych kanałach, których pasma są na siebie nałożone (ang. *overlapping*). W praktyce zespoły filtrów wąskopasmowych mają zastosowanie m. in. w radiokomunikacji [38].

Dualną interpretacją dla dyskretnej w czasie wersji STFT jest zbiór widm chwilowych. Każde widmo odpowiada wydzielonemu, przez okno analizujące, segmentowi sygnału; zwanemu ramką. Tu również ciągła w czasie STFT jest formą

graniczną, gdzie odległości w czasie środków sąsiednich ramek maleją do zera. Widma chwilowe ułożone są wzdłuż osi częstotliwości. Sąsiednie segmenty sygnału są na siebie nakładane (ang. *overlapping*); dla sygnałów niestacjonarnych, uwidacznia się to stopniową zmianą widma chwilowego w czasie.

### 2.3.1 Spektrogram klasyczny

Spektrogram to jedna z estymat rozkładu energii sygnału w dziedzinie czas-częstotliwość. Spektrogram klasyczny oblicza się na podstawie STFT w następujący sposób:

$$E(t, \omega) = |U(t, \omega)|^2 = (A(t, \omega))^2; \quad E(t, \omega) \in \mathbb{R}, \quad (2.43)$$

gdzie  $E(t, \omega)$  oznacza gęstość energii w punkcie  $(t, \omega)$ . Przeważnie spektrogram prezentuje się w skali logarytmicznej i wyraża w decybelach lub w neperach. Spektrogram wyrażony w neperach można obliczyć następująco:

$$\Lambda(t, \omega) = \text{Ln}(|U(t, \omega)|) = \text{Ln}(A(t, \omega)); \quad \Lambda(t, \omega) \in \mathbb{R}. \quad (2.44)$$

W niniejszej pracy spektrogram opisany wzorami (2.43) lub (2.44) określa się dodatkowo przymiotnikiem „klasyczny” dla odróżnienia od innych estymat rozkładu energii.

W praktyce można spotkać zastosowania rozkładów brzegowych energii spektrogramu. Rozkład brzegowy w dziedzinie częstotliwości jest obliczany podobnie jak w metodzie Welcha [126]:

$$E(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} |U(t, \omega)|^2 dt; \quad E(\omega) \in \mathbb{R} \quad (2.45)$$

oraz analogicznie w dziedzinie czasu:

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |U(t, \omega)|^2 d\omega; \quad E(t) \in \mathbb{R}. \quad (2.46)$$

Wzory (2.45) oraz (2.46) potwierdzają wnioski płynące z twierdzenia Parsewala m. in. równość energii sygnału w dziedzinie czas, częstotliwość oraz czas-częstotliwość:

$$\int_{-\infty}^{\infty} E(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(t, \omega) dt d\omega. \quad (2.47)$$

Wykaz metod analizy sygnałów w dziedzinie czas-częstotliwość oraz analogicznych w dziedzinie czas-skala jest imponujący, trudno nawet wymienić wszystkie metody wraz z ich odmianami; dlatego oraz ze względu na ograniczone ramy niniejszego opracowania, temat innych metod analizy w dziedzinie czas-częstotliwość, lub w innych dziedzinach, nie będzie poruszany.

### 2.3.2 Liczba stopni swobody sygnału

Liczba stopni swobody sygnału ciągłego odpowiada minimalnej liczbie próbek potrzebnych do jego wiernej rekonstrukcji. Kluczowy wpływ ma na to odpowiedni dobór szybkość próbkowania. Tak więc minimalną graniczną szybkość próbkowania przy której sygnał może być idealnie odtworzony określa twierdzenie o próbkowaniu lub twierdzenie Nyquista. W praktyce minimalna liczba próbek pobranych w jednostce czasu zależy od szerokości pasma sygnału oryginalnego. Efektywną szerokość pasma sygnału można zdefiniować następująco [17, 59]:

$$B_e^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 E(\omega) d\omega \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) d\omega, \quad (2.48)$$

gdzie

$$\omega_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega E(\omega) d\omega \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) d\omega, \quad (2.49)$$

zaś efektywna szerokość pasma sygnału jest oznaczona jako  $B_e$ ;  $B_e > 0$ . Analogicznie można zdefiniować efektywny czas trwania sygnału:

$$T_e^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 E(t) dt \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} E(t) dt, \quad (2.50)$$

gdzie

$$t_0 = \int_{-\infty}^{\infty} t E(t) dt \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} E(t) dt, \quad (2.51)$$

natomiast efektywny czas trwania sygnału jest oznaczony jako  $T_e$ ;  $T_e > 0$ . W rozdziale pierwszym książki [17] autor definiuje liczbę stopni swobody sygnału w sposób następujący:

$$\chi = B_e T_e. \quad (2.52)$$

Liczba stopni swobody jest w praktyce stosowana do opisu okien analizujących. Szczególną rolę w analizie spektrograficznej odgrywają okna o małej liczbie stopni swobody - przykładem takiego okna jest okno Gabora, mające kształt impulsu Gaussa.

### 2.3.3 Optymalizacja okna analizującego

Wiele razy do tej pory podkreślano ważną, a wręcz kluczową, rolę okna analizującego w całym procesie analizy sygnału w dziedzinie czas-częstotliwość. Jednocześnie trudno znaleźć uniwersalny przepis na dobór parametrów okna, gdyż zależy on od szeregu czynników, m. in. od rodzaju sygnału i celu analizy. Czasem parametry okna dobierane są subiektywnie, intuicyjnie oceniając otrzymane

zobrazowania. Dlatego w niniejszej sekcji omówiono metodę mogącą pomóc w doborze okna analizującego, stosując kryterium statystycznego rozkładu wartości gęstości energii interpretowanego jako indeks koncentracji energii.

## Indeks koncentracji energii

Jednym ze sposobów oceny okna analizującego może być pomiar koncentracji energii w obliczonym spektrogramie. Jako miarę tej koncentracji zaproponowano tzw. indeks koncentracji energii (ECI) [37, 35], który jest inspirowany wskaźnikiem Herfindahla-Hirschmana, znanym z ekonomii [12, 14]. Należy tu zaznaczyć, iż ECI nie wyraża koncentracji energii w rozumieniu geometrycznym, ani czasowo-częstotliwościowym, a jedynie opisuje statystyczny rozkład wartości gęstości energii. Dlatego nie zaleca się stosowania tego wskaźnika do porównywania rozkładów energii w dziedzinie czas-częstotliwość oszacowanych dla różnych sygnałów. Ponieważ wszystkie prezentowane w niniejszej rozprawie rozkłady były obliczane na podstawie dyskretnych algorytmów, to do obliczania parametru ECI zastosowano również dyskretną wersję tego wzoru:

$$\mathcal{J} = LK \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \left( \frac{W[l, k]}{W_{\text{sum}}} \right)^2 \quad (2.53)$$

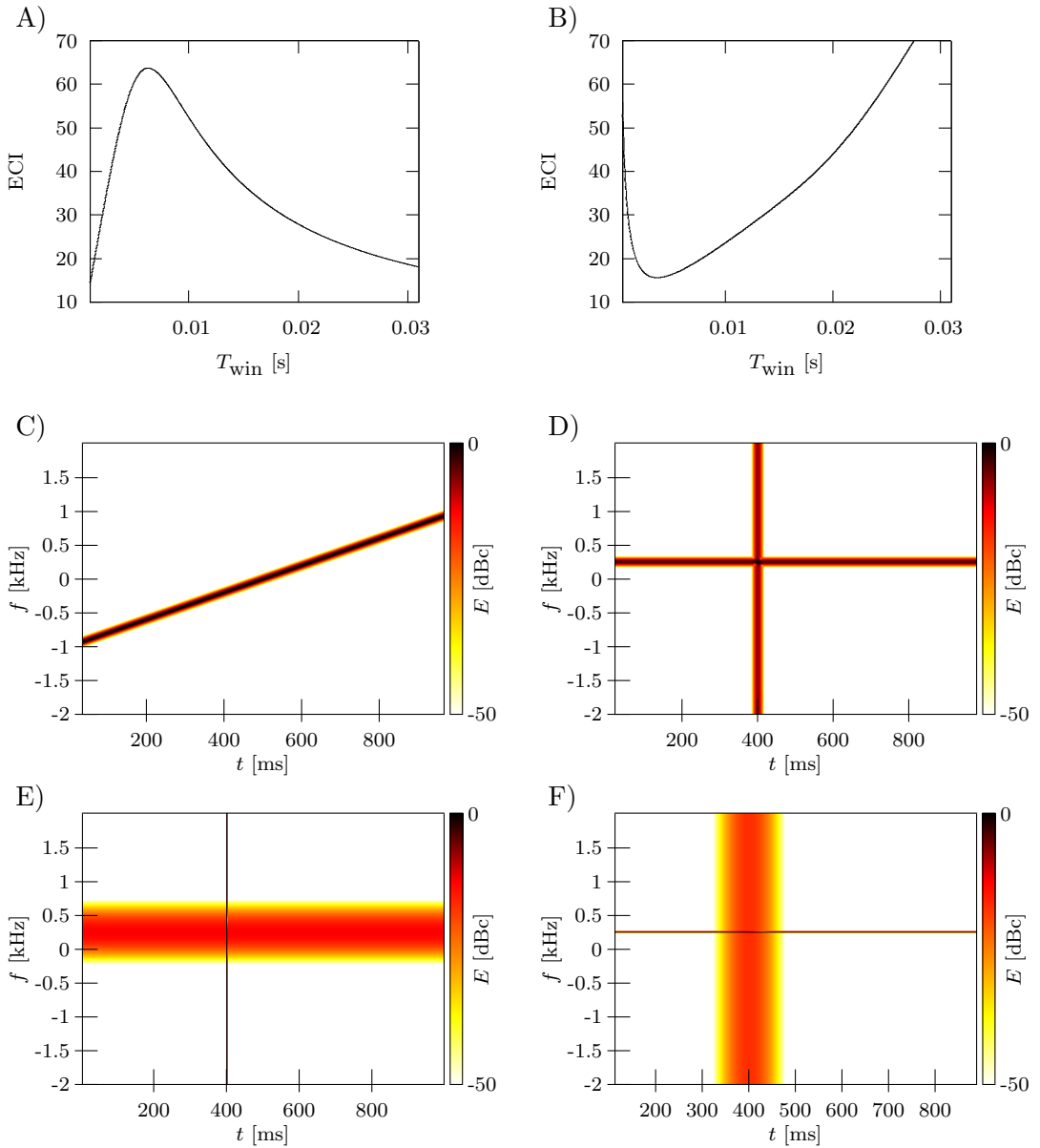
$$\mathcal{J} \in \mathbb{R}; \quad \mathcal{J} > 0; \quad W_{\text{sum}} > 0,$$

gdzie  $L \times K$  to rozdzielczość (w prążkach) rozpatrywanego fragmentu spektrogramu,  $W[l, k]$  wyraża energię zgromadzoną w ograniczonym obszarze  $t_{l-0.5} > t > t_{l+0.5}$  oraz  $\omega_{k-0.5} > \omega > \omega_{k+0.5}$ , gdzie  $t_l$  to chwila czasu odpowiadająca  $l$ -tej kolumnie STFT oraz  $\omega_k$  to pulsacja środkowa  $k$ -tego kanału; czyli energię reprezentowaną przez jeden prążek zobrazowania.  $W_{\text{sum}}$  oznacza skumulowaną energię całego rozpatrywanego fragmentu płaszczyzny czas-częstotliwość.

Współczynnik ECI jest bezwymiarowy i może przyjmować wartości z przedziału:  $\langle 1, LK \rangle$ . Wartość najmniejszą, czyli jeden, przyjmie on gdy energia jest równomiernie rozmieszczona w analizowanym fragmencie płaszczyzny czas-częstotliwość. Wtedy gęstość energii jest stała, a wzór (2.53) przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\min} &= LK \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \left( \frac{W_{\text{sum}}/(LK)}{W_{\text{sum}}} \right)^2 = \\ &= LK \left( \frac{W_{\text{sum}}/(LK)}{W_{\text{sum}}} \right)^2 \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K 1 = \\ &= LK \left( \frac{1}{LK} \right)^2 LK = 1. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Natomiast z drugiej strony ECI przyjmuje największą wartość, gdy cała energia  $W_{\text{sum}} > 0$  jest skoncentrowana w jednym prążku rozpatrywanego fragmentu płaszczyzny, wtedy wzór (2.53) można zapisać następująco:



Rysunek 2.1: Krzywe obrazujące zależności parametrów ECI od szerokości okna analizującego typu Blackmana-Harrisa dla spektrogramów klasycznych. Analizie poddawano: A) sygnał świergotowy, B) sumę sygnału harmonicznego oraz impulsu. Spektrogramy klasyczne: C) sygnału świergotowego dla okna o efektywnej szerokości równej około 6.36 [ms], DEF) sumy sygnału impulsowego i fragmentu zespolonej sinusoidy dla efektywnych szerokości okien równych odpowiednio około: 3.8, 0.66 i 20.5 [ms].

$$\mathcal{J}_{\max} = LK \left( \frac{W_{\text{sum}}}{W_{\text{sum}}} \right)^2 = LK. \quad (2.55)$$



Na rys. 2.1 przedstawiono m. in. przykładowe zależności parametru ECI od efektywnej szerokości okna analizującego, dla spektrogramów klasycznych. Dla sygnału świergotowego (rys. 2.1.A) w charakterystyce ECI występuje jedno globalne maksimum, któremu odpowiada szerokość okna równa około 6.36 [ms]. Zatem jest to szerokość optymalna z punktu widzenia koncentracji energii szacowanej na podstawie ECI (rys. 2.1.C). Dla okien węższych niż 6.36 [ms] następuje „rozmycie” energii wzdłuż osi częstotliwości, natomiast dla okien szerszych wzdłuż osi czasu.

Odmierna sytuacja występuje dla sygnału składającego się z jednego impulsu oraz z fragmentu sinusoidy zespolonej (rys. 2.1.B). Dla okien względnie wąskich występuje wysoka koncentracja energii pochodzącej od impulsu, co można wywnioskować z rys. 2.1.E. Natomiast analiza przy pomocy okien względnie szerokich skutkuje wysoką koncentracją energii stacjonarnej sinusoidy (rys. 2.1.F). Odzwierciedlenie tego można dostrzec w kształcie charakterystyki ECI na rys. 2.1.B, gdzie kompromis pomiędzy koncentracją energii sygnałów wolno zmiennych oraz impulsowych wyraża się jako minimum omawianej charakterystyki. Zatem w tej sytuacji poprzez minimum charakterystyki ECI można wskazać okno optymalne z punktu widzenia średniej koncentracji energii wszystkich składowych sygnału. Tu okno spełniające to kryterium ma efektywną szerokość równą 3.8 [ms], spektrogram klasyczny obliczony przy jego pomocy przedstawiono na rys. 2.1.D.

## Rozdział 3

# Gradient zespolonej fazy STFT

Kamieniem milowym w analizie spektrograficznej, była metoda wprowadzona przez Koderę *et al.* w pracy [83]. W literaturze popularno-naukowej określa się ją różnymi nazwami – od zaproponowanej przez Koderę *et al.*: *Modified Moving Window Method*, przez *Reassignment Method*, której promotorami są m.in. Auger i Flandrin [5] oraz Fitz i Fulop [58], aż do *Cross-Spectral Method* proponowanej przez Nelsona [94]. Ten ostatni wprowadził również inną nazwę, do określenia transformaty będącej wynikiem omawianej operacji, a mianowicie *Concentrated STFT*, co można przetłumaczyć na język polski, jako skoncentrowana krótkoczasowa transformata Fouriera (CSTFT). Analogicznie do STFT można więc nazwać tę metodę jako skoncentrowana krótkoczasowa transformacja Fouriera (CSTFT<sub>{}</sub> ).

Nazwa CSTFT oddaje najważniejszą cechę nowo wprowadzonej reprezentacji sygnału, czyli to, iż ma większą koncentrację energii, niż klasyczna STFT. Mówiąc ściślej, w pewnym stopniu koncentracji może ulec energia rozproszona w wyniku działania Zasady Nieoznaczoności. Z przeprowadzonych doświadczeń, również opisanych w niniejszej rozprawie, wynika, iż tym silniejszą koncentrację energii CSTFT można uzyskać, im dokona się lepszej separacji energii STFT pochodzącej od różnych części składowych analizowanego sygnału. W pewnym stopniu, separację energii w STFT można zrealizować poprzez odpowiedni dobór parametrów okna analizującego.

W ramach CSTFT<sub>{}</sub>  można wyróżnić kilka głównych operacji. Pierwszą jest klasyczna STFT<sub>{}</sub> , za pomocą której oblicza się STFT. Innowacyjność CSTFT<sub>{}</sub>  polega na wykorzystaniu, w kolejnych krokach, informacji zawartej zarówno w amplitudzie jak i w fazie STFT, którą można zdefiniować m. in. za pomocą poniższego wzoru:

$$\phi(t, \omega) = \arg \{U(t, \omega)\} = \text{im} \left( \ln \{U(t, \omega)\} \right). \quad (3.1)$$

Następnie na podstawie widma fazowego szacuje się m. in. kanałową pulsację chwilową (CIF), czynność tę można opisać następującym wzorem:

$$\Omega(t, \omega) = \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, \omega); \quad \Omega(t, \omega) \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

gdzie  $\Omega(t, \omega)$  reprezentuje CIF w rad/s. Analogicznie jak we wzorze (2.13) wielkość tą można wyrazić, w hercach, następująco:

$$F(t, \omega) = \frac{\Omega(t, \omega)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, \omega); \quad F(t, \omega) \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Tak obliczona CIF posłuży w dalszej kolejności do oszacowania poprawek w dystrybucji energii STFT w częstotliwości.

Analogiczne poprawki w czasie można oszacować na podstawie lokalnego opóźnienia grupowego (LGD), które definiuje się na podstawie pochodnej cząstkowej fazy STFT względem pulsacji:

$$\Theta(t, \omega) = -\frac{\partial}{\partial \omega} \phi(t, \omega); \quad \Theta(t, \omega) \in \mathbb{R}, \quad (3.4)$$

gdzie  $D(t, \omega)$  oznacza LGD wyrażone w rad·s. Podobnie jak we wzorze (2.29) można je wyrazić, w sekundach, następująco:

$$D(t, \omega) = \frac{\Theta(t, \omega)}{2\pi} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \omega} \phi(t, \omega); \quad D(t, \omega) \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

### 3.1 Wektorowe pole przemieszczające

Oszacowane, na podstawie wzorów (3.2), (3.3), (3.4) oraz (3.5), reprezentacje stosuje się do ponownej dystrybucji energii STFT – stąd angielszczyzna określenie *reassignment*, które dosłownie można by przetłumaczyć na „przeprzypisanie”. Taki słowotwór nie występuje jednak w słownikach języka polskiego. Poniżej przedstawiono sposób zastosowania wspomnianych poprawek położenia na płaszczyźnie czas-częstotliwość mianowanej wzdłuż osi czasu w sekundach, natomiast wzdłuż osi częstotliwości w radianach na sekundę:

$$(t, \omega) \mapsto (t', \omega') \equiv (t, \omega) \mapsto (t + T(t, \omega), \Omega(t, \omega)), \quad (3.6)$$

gdzie energia z punktu  $(t, \omega)$  jest przemieszczana do punktu  $(t', \omega')$ . Dla dyskretnej transformaty STFT do każdego jej prążka można przypisać dokładnie jeden tzw. wektor przemieszczenia. Natomiast dla transformaty ciągłej w czasie i częstotliwości można zdefiniować tzw. wektorowe pole przemieszczające:

$$\vec{V}(t, \omega) = \begin{bmatrix} V_D(t, \omega) \\ V_\Omega(t, \omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(t, \omega) \\ \Omega(t, \omega) - \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \omega} \phi(t, \omega) \\ \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, \omega) - \omega \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

którego poszczególne składowe spełniają następujące zależności:

$$V_\Omega(t, \omega) = 2\pi V_F(t, \omega); \quad V_\Omega(t, \omega), V_F(t, \omega) \in \mathbb{R}, \quad (3.8)$$

$$V_{\Theta}(t, \omega) = 2\pi V_D(t, \omega); \quad V_{\Theta}(t, \omega), V_D(t, \omega) \in \mathbb{R}, \quad (3.9)$$

gdzie  $V_{\Omega}(t, \omega)$ ,  $V_F(t, \omega)$ ,  $V_{\Theta}(t, \omega)$ ,  $V_D(t, \omega)$  są wyrażone odpowiednio w radianach na sekundę, hercach, radianach razy sekunda oraz w sekundach. W prasie anglojęzycznej do opisu tego pola stosuje się nazwę *Reassignment Vector Field* [23, 87, 88]. MVF jest modelem matematycznym i nie ma wymiaru fizycznego. Według wzoru (3.7) natężenie pola jest zdefiniowane na podstawie przemieszczenia jakie powoduje. W dalszej części niniejszej pracy zostanie przedstawiona analiza MVF dla wybranych sygnałów testowych.

## 3.2 Skoncentrowana STFT

Nelson w swoich publikacjach proponował przemieszczanie nie tylko energii, ale również zespolonych wartości STFT. Przy takim przemieszczeniu następuje zaburzenie struktury spektrogramu oraz transformaty STFT, wynikającej z definicji  $STFT_{\{\}}_{\{}$ . Zatem, aby umożliwić operację odwrotną należy zachować informację o przemieszczeniu. Dlatego w niniejszej pracy  $CSTFT_{\{\}}_{\{}$  została zdefiniowana następująco:

$$CSTFT\{u(t), h(t)\} = \{U(t, \omega), \vec{V}(t, \omega)\}, \quad (3.10)$$

gdzie pierwszym członem proponowanej transformaty jest klasyczna STFT oznaczona przez  $U(t, \omega)$ , natomiast drugim MVF oznaczone przez  $\vec{V}(t, \omega)$ , które zachowuje informację o przemieszczeniu. Taka reprezentacja jest odwracalna, ponieważ STFT jest w niej zachowana z niezaburzoną strukturą.

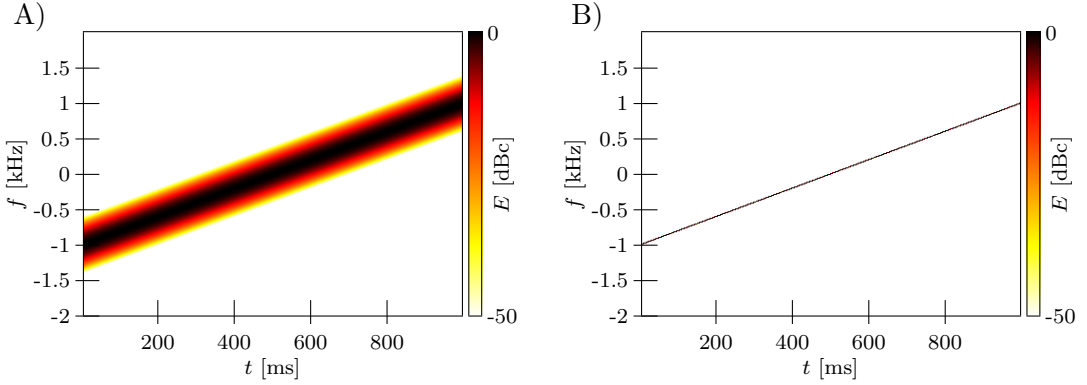
## 3.3 Spektrogram skoncentrowany

Stosując MVF szacuje się nowe rozmieszczenie energii na płaszczyźnie czas-częstotliwość – dla takiego rozkładu energii zaproponowano nazwę: spektrogram skoncentrowany. Poniżej przedstawiono wzór analityczny, który opisuje ten rozkład energii:

$$E_{\vec{V}}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(\tau, \varpi) \delta(\tau - t + V_D(t, \omega), \varpi - \omega + V_{\Omega}(t, \omega)) d\tau d\varpi, \quad (3.11)$$

gdzie  $E(\tau, \varpi)$  oznacza gęstość energii spektrogramu klasycznego,  $\tau$  czas mianowany w sekundach, natomiast  $\varpi$  pulsację wyrażoną w radianach na sekundę.

W literaturze często rozważa się wersje dyskretne omawianych tu przekształceń i reprezentacji, gdyż przedstawiane algorytmy zwykle są implementowane w systemach cyfrowych. W takiej sytuacji, prążkom dyskretnej STFT przyporządkowuje się wektory przemieszczenia. Należy tu jednak zauważyć, iż długości tych wektorów, oraz równocześnie ich składowe w czasie i częstotliwości, przyjmują deterministyczne, ale w ogólności, dowolne wartości ze zbioru liczb rzeczywistych.



Rysunek 3.1: Spektrogramy sygnału świergotowego o liniowym przyroście częstotliwości chwilowej: A) spektrogram klasyczny, B) spektrogram skoncentrowany; efektywna szerokość okna analizującego dla obu spektrogramów wynosi 0.89 [ms].

Skutkuje to tym, iż prążki STFT są przemieszczane ze struktury uporządkowanego rastra do innej bezrastrowej przestrzeni. Aby oszacować rozkład energii w węzłach, dotychczasowego bądź nowego, rastra należy dokonać stosownej interpolacji gęstości energii.

Na rys. 3.1 przedstawiono dwa spektrogramy: klasyczny i, odpowiadający mu, skoncentrowany. Szerokość okna analizującego celowo została dobrana nieoptymalnie z punktu widzenia koncentracji energii. A mimo to, oceniając intuicyjnie, uzyskano wysoką koncentrację energii w spektrogramie skoncentrowanym – szerokość czasowo-częstotliwościowej reprezentacji świergotu wynosi jeden lub dwa piksele obliczonego zobrazowania.

### 3.4 Pochodne cząstkowe drugiego rzędu fazy STFT

Dynamika reprezentacji sygnału, takich jak CIF oraz LGD, może zostać wyrażona za pomocą drugich pochodnych cząstkowych fazy STFT. Odpowiednio zmiana CIF w czasie to druga pochodna cząstkowa fazy STFT względem czasu, zdefiniowana następująco:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \arg \{U(t, \omega)\} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(t, \omega) = \frac{\partial}{\partial t} \Omega(t, \omega). \quad (3.12)$$

Jeżeli częstotliwość chwilowa, zatem również CIF, bywa nazywana prędkością kątową, to druga pochodna cząstkowa fazy STFT reprezentuje przyspieszenie kątowe. Dualnie, druga pochodna cząstkowa fazy STFT względem częstotliwości wyraża zmianę LGD wraz z przyrostem częstotliwości, co opisuje poniższy wzór:

$$\frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \arg \{U(t, \omega)\} = \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \phi(t, \omega) = -\frac{\partial}{\partial \omega} \Theta(t, \omega). \quad (3.13)$$

Analogiczna sytuacja występuje dla drugiej mieszanej pochodnej cząstkowej fazy STFT:

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial \omega} \arg \{U(t, \omega)\} = \frac{\partial^2}{\partial t \partial \omega} \phi(t, \omega) = \frac{\partial}{\partial \omega} \Omega(t, \omega) = -\frac{\partial}{\partial t} \Theta(t, \omega). \quad (3.14)$$

Nelson w opracowaniach [96, 94] zaproponował zastosowanie tej reprezentacji do separacji składowych impulsowych od składowych wolno zmiennych analizowanego sygnału. W niniejszej rozprawie w rozdziale piątym zaproponowano alternatywne rozwiązanie polegające na zastosowaniu gradientu zespolonej fazy STFT.

Gradient zespolonej fazy STFT jest zdefiniowany jako dwu członowa, zespolona reprezentacja sygnału w dziedzinie czas-częstotliwość; składa się z kanałowej zespolonej pulsacji chwilowej (CICF) oraz zespolonego lokalnego opóźnienia grupowego (LCGD); wyraża lokalne cechy sygnału w kontekście płaszczyzny czas-częstotliwość. Z powodu zespolonej natury jego członów można mówić o czterech rzeczywistych reprezentacjach: kanałowej pulsacji chwilowej (CIF), lokalnym opóźnieniu grupowym (LGD), znakowanej kanałowej chwilowej szerokości pasma (SCIBW) oraz znakowanym lokalnym czasie trwania (SLGDR). O ile CIF oraz LGD są reprezentacjami dobrze opisanymi w literaturze, natomiast SCIBW to składowa radialna CICF, której moduł jest również dobrze znany i wyraża chwilową szerokość pasma w kanałach STFT, o tyle SLGDR jest reprezentacją wprowadzoną i nazwaną poprzez dualizm czasowo-częstotliwościowy w stosunku do pozostałych części gradientu zespolonej fazy STFT.

### 3.5 Zespolona kanałowa pulsacja chwilowa

SCIBW jest reprezentacją sygnału w dziedzinie czas-częstotliwość analogiczną do SIBW zdefiniowaną w dziedzinie czasu według wzoru (2.16). SCIBW oblicza się jako logarymiczną pochodną cząstkową modułu STFT względem czasu i może być wyrażona w radianach na sekundę następująco:

$$\Sigma(t, \omega) = \frac{\partial}{\partial t} \Lambda(t, \omega); \quad \Sigma(t, \omega) \in \mathbb{R}. \quad (3.15)$$

SCIBW wyrażona w hercach, podobnie jak SIBW w (2.17), jest zdefiniowana przez poniższy wzór:

$$B(t, \omega) = \frac{\Sigma(t, \omega)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \Lambda(t, \omega); \quad B(t, \omega) \in \mathbb{R}. \quad (3.16)$$

Pionowe przekreślenie symbolu  $B(t, \omega)$  wprowadzono dla odróżnienia tej reprezentacji od, zawsze nieujemnej, chwilowej szerokości pasma (2.18) również wyrażonej w hercach oraz od tzw. kanałowej chwilowej szerokości pasma (CIBW) zdefiniowanej według następującego wzoru:

$$B(t, \omega) = |B(t, \omega)|; \quad B(t, \omega) \in \mathbb{R}; \quad B(t, \omega) \geq 0 \quad (3.17)$$

Uwzględniając wzory (3.2) oraz (3.3) można zdefiniować CICF jako pochodną cząstkową zespolonej fazy STFT względem czasu następująco:

$$\begin{aligned}
S(t, \omega) &= \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \omega) = \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \ln \{U(t, \omega)\} = \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \ln \{A(t, \omega) \exp(j\phi(t, \omega))\} = \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \ln \{A(t, \omega)\} + \ln \{ \exp(j\phi(t, \omega)) \} \right\} = \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \{ \Lambda(t, \omega) + j\phi(t, \omega) \} = \frac{\partial}{\partial t} \Lambda(t, \omega) + j \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, \omega) = \\
&= \Sigma(t, \omega) + j\Omega(t, \omega) = 2\pi B(t, \omega) + j2\pi F(t, \omega); \quad S(t, \omega) \in \mathbb{C}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Zatem SCIBW wyrażone w radianach przez sekundę jest częścią rzeczywistą CICF:

$$\Sigma(t, \omega) = \text{re} (S(t, \omega)). \tag{3.19}$$

Natomiast CIF mianowane w tych samych jednostkach jest częścią urojoną CICF:

$$\Omega(t, \omega) = \text{im} (S(t, \omega)). \tag{3.20}$$

Dokonyując analogicznych przekształceń jak w wyprowadzeniu (2.22), CICF można wyrazić jako stosunek pochodnej cząstkowej STFT względem czasu do STFT:

$$S(t, \omega) = \frac{1}{U(t, \omega)} \frac{\partial U(t, \omega)}{\partial t}. \tag{3.21}$$

### 3.6 Zespolone lokalne opóźnienie grupowe

Podobne rozważania, co dla CICF, można przeprowadzić dla, dualnego wobec niej, LCGD. LCGD jest analogiczną reprezentacją w dziedzinie czas-częstotliwość co zespolone opóźnienie grupowe (CGD) w dziedzinie częstotliwości. W rozdziale drugim zostało wymienionych kilka reprezentacji sygnału w dziedzinie częstotliwości m. in. GD, GDR, SGDR oraz CGD. Podobną listę reprezentacji sygnału można przedstawić w dziedzinie czas-częstotliwość. Rozpoczynając od znakowanego lokalnego grupowego czasu trwania (SLGDR) zdefiniowanego jako logarytmiczna pochodna cząstkowa amplitudy STFT względem częstotliwości według następującego wzoru:

$$\mathcal{U}(t, \omega) = \frac{\partial}{\partial \omega} \Lambda(t, \omega); \quad \mathcal{U}(t, \omega) \in \mathbb{R}, \tag{3.22}$$

gdzie  $\mathcal{U}(t, \omega)$  jest wyrażona w [rad·s]. SLGDR mianowany w sekundach jest opisany poniżej:

$$\mathcal{F}(t, \omega) = \frac{\mathcal{U}(t, \omega)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \omega} \Lambda(t, \omega); \quad \mathcal{F}(t, \omega) \in \mathbb{R}. \tag{3.23}$$

Pionowe przekreślenie wprowadzono dla podkreślenia, iż rozpatrywany jest także znak SLGRD. Ponadto analogicznie jak w (2.34), poniżej wprowadzono nieujemną reprezentację tzw. lokalnego grupowego czasu trwania (LGDR), który również jest wyrażony w sekundach:

$$T(t, \omega) = |\mathcal{F}(t, \omega)|; \quad T(t, \omega) \in \mathbb{R}; \quad T(t, \omega) \geq 0. \quad (3.24)$$

SLGDR oraz LGD stanowią odpowiednio rzeczywistą i urojoną część LCGD:

$$\mathcal{U}(t, \omega) = \text{re} (Z(t, \omega)), \quad (3.25)$$

$$\mathcal{\Theta}(t, \omega) = \text{im} (Z(t, \omega)). \quad (3.26)$$

Można to wykazać definiując LCGD jako cząstkową pochodną zespolonej fazy STFT względem częstotliwości i postępując analogicznie jak w wyprowadzeniu (2.35), że:

$$\begin{aligned} Z(t, \omega) &= \frac{\partial}{\partial \omega} \Psi(t, \omega) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \omega} \ln \{U(t, \omega)\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \omega} \ln \{A(t, \omega) \exp(j\phi(t, \omega))\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \ln \{A(t, \omega)\} + \ln \{ \exp(j\phi(t, \omega)) \} \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \omega} \{ \Lambda(t, \omega) + j\phi(t, \omega) \} = \frac{\partial}{\partial \omega} \Lambda(t, \omega) + j \frac{\partial}{\partial \omega} \phi(t, \omega) = \\ &= \mathcal{U}(t, \omega) - j\mathcal{\Theta}(t, \omega) = 2\pi\mathcal{F}(t, \omega) - j2\pi D(t, \omega); \quad Z(t, \omega) \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Podobnie jak CGD, składniki LCGD mają wymiar czasu i są wyrażone w jednostkach [rad·s]. Inną definicję LCGD można wyprowadzić analogicznie jak w formule (2.36) oraz dualnie do definicji CICF ze wzoru (3.21) i ICF ze wzoru (2.22). Wtedy LCGD jest wyrażone przez stosunek pochodnej cząstkowej STFT względem częstotliwości do STFT, co przedstawia poniższy wzór:

$$Z(t, \omega) = \frac{1}{U(t, \omega)} \frac{\partial U(t, \omega)}{\partial \omega}. \quad (3.28)$$

### 3.7 Gradient zespolonej fazy STFT

W klasycznej analizie matematycznej gradient pola skalarного wyraża szybkość zmiany tego pola; jest również traktowany jako pole wektorowe wskazujące kierunek największej zmiany pola w każdym jego punkcie oraz wyrażający wartość bezwzględną szybkości tej zmiany. W niniejszej pracy zastosowano uogólnienie operacji gradientu na liczby zespolone. Składowymi gradientu zespolonej fazy



STFT są odpowiednio CICF oraz LCGD zdefiniowane za pomocą wzorów (3.18) i (3.27). Gradient zespolonej fazy STFT może zostać opisany za pomocą tzw. macierzy Jacobiego następująco:

$$\nabla\Psi(t, \omega) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\Psi(t, \omega) \\ \frac{\partial}{\partial \omega}\Psi(t, \omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(t, \omega) \\ Z(t, \omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma(t, \omega) + j\Omega(t, \omega) \\ \mathcal{U}(t, \omega) - j\Theta(t, \omega) \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

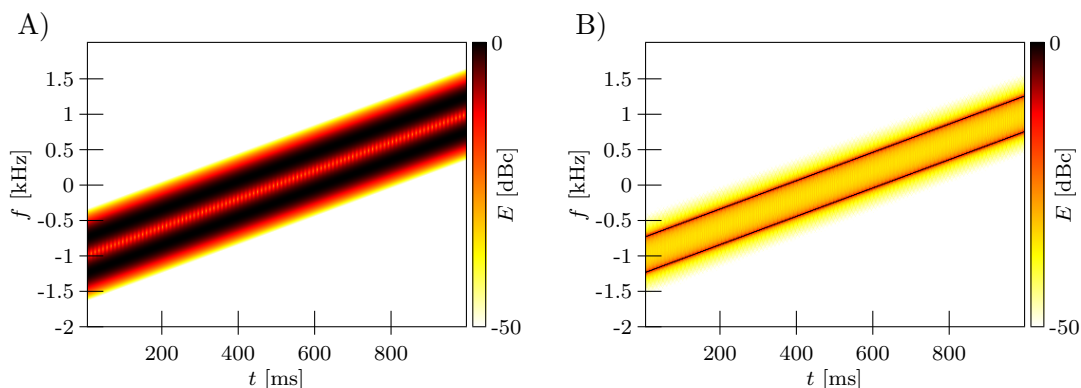
gdzie  $\nabla$  jest różniczkowym operatorem nabra, natomiast  $\nabla\Psi(t, \omega)$ , umiejscowiony na płaszczyźnie czas-częstotliwość, reprezentuje gradient zespolonej fazy STFT. W dalszej części niniejszej rozprawy zostaną przedstawione metody analizy sygnału, w których zastosowano poszczególne składowe wprowadzonego gradientu  $\nabla\Psi(t, \omega)$ .

# Rozdział 4

## Wybrane zastosowania

### 4.1 Atraktogram

Rozkłady energii reprezentowane przez spektrogramy klasyczne, obliczane według wzoru (2.43), są zwykle rozmyte. Wynika to z tzw. „czasowo-częstotliwościowej bezwładności okna analizującego”, którą dokładnie opisuje Zasada Nieoznaczoności Heisenberga-Gabora. W ramach obliczania spektrogramu skoncentrowanego (3.11) istnieje, w pewnym zakresie, możliwość zebrania rozproszonej energii oraz umieszczenia jej w pobliżu tzw. atraktorów, tak jak przedstawiono to na rysunkach 3.1 oraz 4.1. Na rys 3.1 miejsce występowania atraktora pokrywa się z położeniem wynikającym z przepisu matematycznego sygnału na płaszczyźnie czas-częstotliwość. Wskazany rysunek prezentuje dwa spektrogramy linearnie częstotliwościowo modulowanego (LFM) sygnału świergotowego, zatem położenie

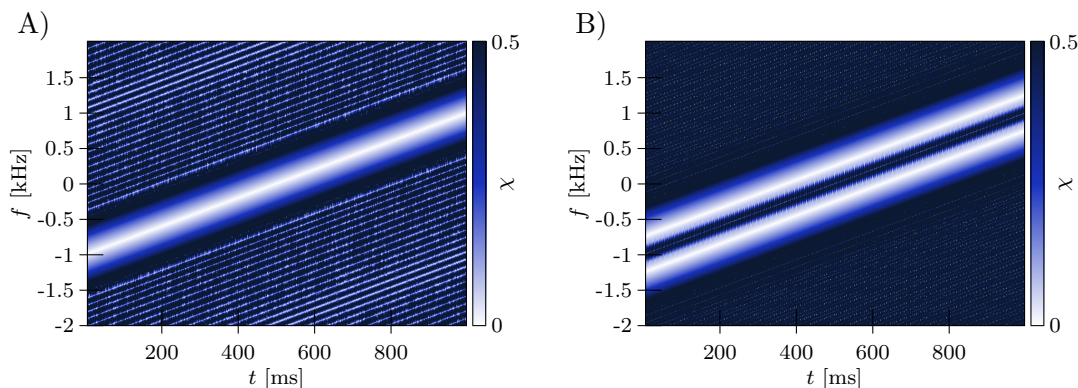


Rysunek 4.1: Spektrogramy sygnału dwu-składnikowego, którego składniki to świergoty o liniowo przyrastającej częstotliwości chwilowej: A) spektrogram klasyczny, B) spektrogram skoncentrowany; szerokość okna analizującego dla obu spektrogramów wynosi około 0.89 [ms].

atraktora w dziedzinie czas-częstotliwość jest reprezentowane przez linię prostą pokrywającą się z faktycznym przebiegiem częstotliwości chwilowej sygnału.

Przeważnie, przy obliczaniu spektrogramu klasycznego, oprócz rozproszenia, następuje również zmieszanie energii pochodzącej od różnych komponentów sygnału, bądź od różnych fragmentów tego samego komponentu. Dokładne oszacowanie LGD oraz CIF dla każdego komponentu, w miejscach znaczącego zmieszania energii, staje się wtedy niemożliwe. A zatem lokalizacja energii w spektrogramie skoncentrowanym staje się niedokładna i obciążona błędem, tak jak zostało to przedstawione na rysunku 4.1.B. Ponadto, o ile  $STFT_{\Omega}$  jest operacją liniową, o tyle spektrogram, ilustrujący rozkład energii, nie spełnia już Zasady Superpozycji. Z poczynionych obserwacji wynika, iż stosując podejście Kodery *et al.*, tym dokładniej można oszacować lokalizację atraktora reprezentującego dany komponent sygnału, im bardziej jego energia dominuje w rozpatrywanym fragmencie spektrogramu. Należy przy tym pamiętać, iż przy stosowaniu szerokich okien analizujących istnieje możliwość zagarnięcia przez okno energii pochodzącej od dwóch różnych, oddalonych od siebie, fragmentów tego samego komponentu powodując błędy analogiczne, jak te wynikające ze zmieszania energii pochodzącej od dwóch różnych komponentów sygnału.

Istotnym aspektem niniejszej rozprawy jest przedstawienie metody pozwalającej na wskazanie tych obszarów spektrogramu, w których dominuje energia tylko jednego niewielkiego fragmentu pojedynczego komponentu sygnału – obszar ten nazwano **atraktorium**. Gdyż na podstawie  $STFT$  z tych obszarów płaszczyzny czas-częstotliwość można dokładnie oszacować położenie atraktorów i dzięki temu odnaleźć „strukturę sygnału” w dziedzinie czas-częstotliwość. Pojęcie atraktorium jest powiązane, więc nie z całym komponentem sygnału, a tylko z jego niewielkiego fragmentu, a wręcz pojedynczym punktem leżącym na atraktorze. Jest to obszar, w którym rozproszono energię sygnału głównie z tego właśnie punktu.



Rysunek 4.2: Rozkład liczby stopni swobody sygnału A) jedno-komponentowy sygnał świergotowy, B) dwu-komponentowy sygnał świergotowy; efektywna szerokość okna analizującego dla obu spektrogramów wynosi około 0.89 [ms].

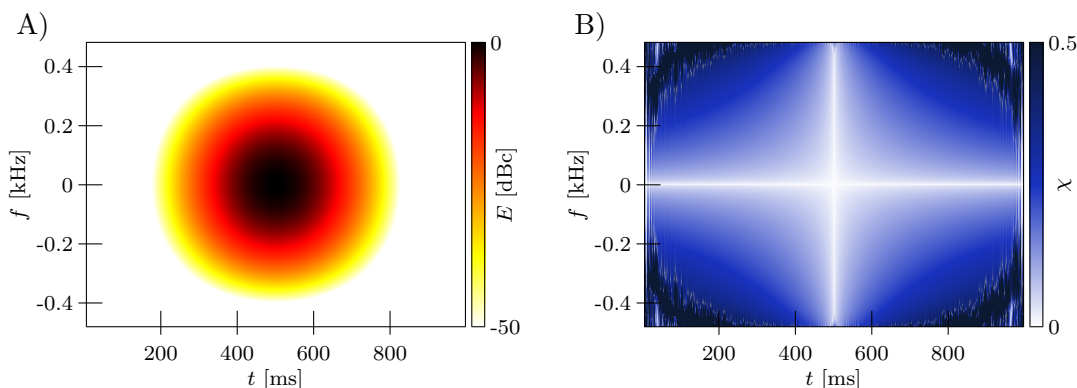
Atraktorium jest więc fragmentem płaszczyzny czas-częstotliwość, w którym sygnał zachowuje się *quasi-stacjonarnie*. Na potrzeby niniejszej rozprawy, w pewnym uproszczeniu przyjmuje się, że jego parametry takie jak CIF i LGD są prawie niezmiennie.

Rozkład energii STFT pochodzącej z atraktoriów i ulokowanej zgodnie z przepisem (3.6) jest tu nazwany **atraktogramem** [32]. W dalszej części niniejszej pracy zaproponowano kryterium według, którego można oszacować zasięg atraktoriów. W tym celu wprowadzono nową reprezentację sygnału w dziedzinie czas-częstotliwość nazwaną lokalną liczbą stopni swobody sygnału (LNDF). Rozkład ten zdefiniowano w oparciu o rzeczywiste części zespolonego gradientu STFT w następujący sposób:

$$\chi(t, \omega) = |\mathcal{F}(t, \omega)B(t, \omega)| = T(t, \omega)B(t, \omega), \quad (4.1)$$

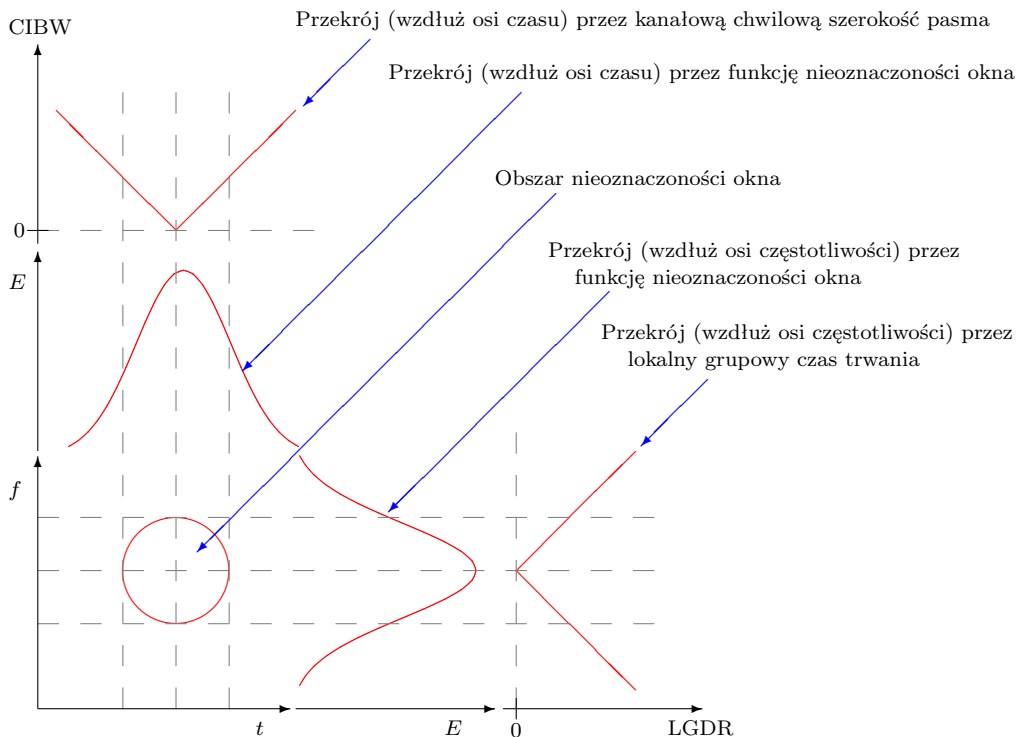
gdzie  $\chi(t, \omega)$  jest nowo zdefiniowanym rozkładem liczby stopni swobody sygnału, natomiast  $T(t, \omega)$  i  $B(t, \omega)$  oznaczają odpowiednio wprowadzone wcześniej lokalny grupowy czas trwania (3.24) oraz kanałową chwilową szerokość pasma (3.17). Zatem LNDF jest wyznaczana w oparciu o parametry STFT określające zasięg lokalnej reprezentacji składowych sygnału w dziedzinie czas-częstotliwość. LNDF jest wielkością bezwymiarową. Na rys. 4.2.A przedstawiono LNDF świergotu o liniowo narastającej częstotliwości chwilowej. Odpowiadający mu spektrogram klasyczny widnieje na rys. 3.1.A. Natomiast na rys. 4.2.B zaprezentowano LNDF sygnału dwu-składnikowego, którego spektrogram klasyczny jest przedstawiony na rys. 4.1.A.

Atraktogram, podobnie jak pyknogram [114], wskazuje lokalne maksima rozkładu energii na płaszczyźnie czas-częstotliwość. Jednak w odróżnieniu od pyknogramu wyraża również poziom energii w atraktoriach.



Rysunek 4.3: A) Funkcja nieoznaczoności okna Gabora (Gaussa) o efektywnej szerokości równej 135 [ms] oraz B) odpowiadający rozkład liczby stopni swobody na płaszczyźnie czas-częstotliwość. Zobrazowania są obliczone numerycznie bazując na krótkoczasowej transformacie Fouriera.

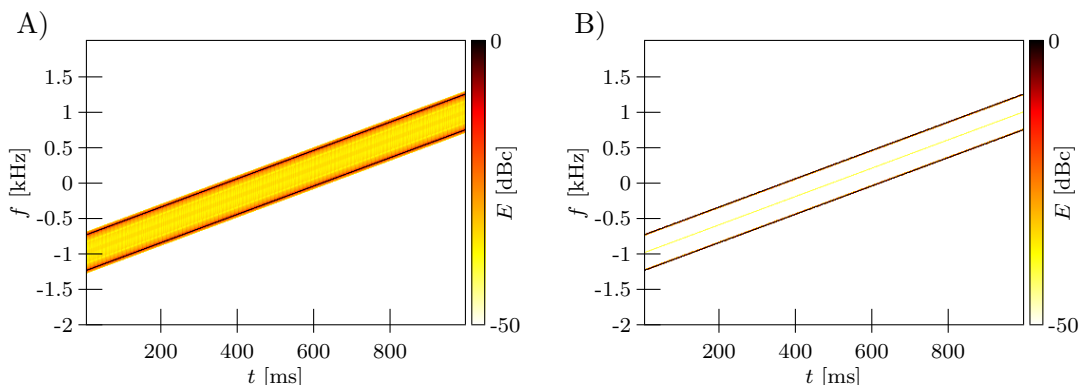
LNDF obliczona dla niemodulowanego okna Gabora przyjmuje wartość najmniejszą, równą zero, wzdłuż osi czasu i częstotliwości - dlatego na rys. 4.3.B można zaobserwować charakterystyczny biały krzyż na niebieskim tle. Wartość LNDF wzrasta w miarę oddalania się od „krzyża”. Na rys. 4.4 przedstawiono przekroje CIBW oraz LGDR wzdłuż osi czasu (dla  $t = 0s$ ) oraz częstotliwości (dla  $\omega = 0$  rad/s), które są czynnikami iloczynu LNDF. Przy analizie bardziej skomplikowanych sygnałów przy pomocy okna Gabora, iloczyn LNDF osiąga najmniejszą wartość zawsze w miejscach występowania lokalnych maksimów rozkładu energii.



Rysunek 4.4: Schemat przedstawiający wybrane parametry okna Gabora.

Atraktogram można wyznaczyć się usuwając energię spektrogramu klasycznego w miejscach płaszczyzny czas-częstotliwość, w których wartość LNDF jest stosunkowo duża. Jest to równoważne z pozostawieniem energii zlokalizowanej w pobliżu lokalnych maksimów spektrogramu - tzw. grzbietów (ang. *ridge*). Próg wartości LNDF ozn. przez  $\alpha_\chi$ , przy którym następuje odcięcie energii można przyjąć arbitralnie, w zależności od analizowanego sygnału i sposobu obliczania STFT. Następnie przeprowadza się redystrybucję tej energii zgodnie z formułą (3.6). Na rys. 4.5 przedstawiono dwa atraktogramy: pierwszy 4.5.A obliczono stosując próg odcięcia dla LNDF równy  $\alpha_\chi = 0.4$ , natomiast drugi 4.5.B obliczono dla progu  $\alpha_\chi = 0.04$ . W idealnej sytuacji powinno się pozostawić tylko tę energię dla której

wartość LNDF wynosi zero. Aby uzyskać ciągłość atraktorów, przy implementacji cyfrowych metod analizy postępowanie takie wymaga bardziej zaawansowanych rozwiązań algorytmu.



Rysunek 4.5: Atraktogramy; szerokość okna analizującego dla obu spektrogramów wynosi około 0.89 [ms]; próg rozkładu liczby stopni swobody szacowanej w dziedzinie czas-częstotliwość, powyżej którego usunięto energię ze spektrogramu przyjęto jako: A)  $\alpha_\chi = 0.4$  oraz B)  $\alpha_\chi = 0.04$ .

## 4.2 Akcelerogram kanałowej fazy chwilowej

Akcelerogramy to graficzne prezentacje przyspieszenia (lub spowolnienia) znane m. in. z nawigacji lotniczej. W niniejszej pracy wprowadzono pojęcie akcelerogramu kanałowej fazy chwilowej, czyli rozkładu przyspieszenia fazy chwilowej poszczególnych komponentów sygnału w dziedzinie czas-częstotliwość. Zaproponowane podejście jest koncepcyjnie nową i oryginalną metodą analizy sygnałów w dziedzinie czas-częstotliwość [34].

### 4.2.1 Sygnały FM

Jednym z wyrazów dynamiki częstotliwości chwilowej może być znany z literatury angielskiej [108, 41] wspomniany już w niniejszej rozprawie *instantaneous chirp rate*. Może on być wyrażony np. przez wzór (2.15). W jednej z tez niniejszej pracy stwierdzono, iż możliwe jest uzyskanie analogicznej reprezentacji sygnału w dziedzinie czas-częstotliwość, przy pomocy znakowanej kanałowej chwilowej szerokości pasma oraz znakowanego lokalnego grupowego czasu trwania. Aby udowodnić tą tezę wprowadzono nową reprezentację sygnału w dziedzinie czas-częstotliwość o nazwie „kanałowa chwilowa szybkość świergotu” (CICR),

która jest zdefiniowana według następującego wzoru:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(t, \omega) &= \Sigma(t, \omega) / \mathcal{U}(t, \omega) = B(t, \omega) / \mathcal{F}(t, \omega) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \Lambda(t, \omega) / \frac{\partial}{\partial \omega} \Lambda(t, \omega); \quad \mathcal{R}(t, \omega) \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

gdzie  $\mathcal{R}(t, \omega)$  oznacza CICR,  $B(t, \omega)$  znakowaną kanałową chwilową szerokość pasma oraz  $\mathcal{F}(t, \omega)$  znakowany lokalny grupowy czas trwania.

Inną reprezentacją sygnału jest dynamika kanałowej częstotliwości chwilowej, którą można wyrazić rozpatrując wzór (2.15) w dziedzinie czas-częstotliwość:

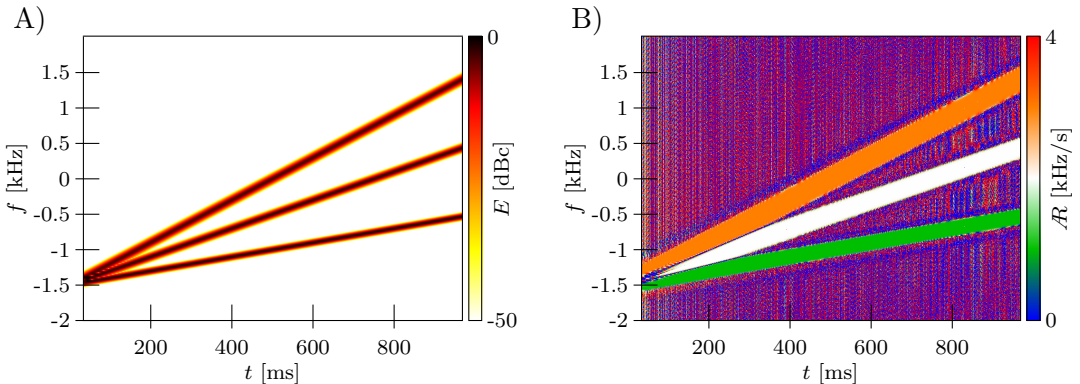
$$R(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \Omega(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(t, \omega); \quad R(t, \omega) \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

Dla odróżnienia od  $\mathcal{R}(t, \omega)$  zdefiniowanej wzorem (4.2) tą wielkość nazwano w niniejszej rozprawie kanałowym chwilowym przyspieszeniem fazowym (CIAA). CICR oraz CIAA nie są tymi samymi reprezentacjami. CIAA wyraża dynamikę fazy transformaty STFT, natomiast CICR wyraża dynamikę fazy poszczególnych komponentów sygnałów estymowaną na płaszczyźnie czas-częstotliwość.

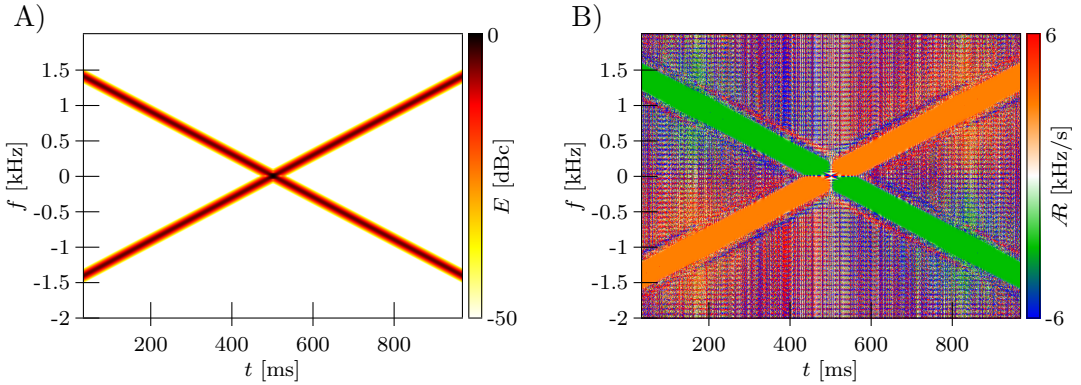
Aby wykazać użyteczność wprowadzonych definicji, dokonano analizy dwóch sygnałów testowych. Na rys. 4.6 przedstawiono spektrogram oraz rozkład CICR sygnału testowego składającego się z trzech komponentów i opisanego następującym wzorem:

$$u_{3\text{-chirp}}(t) = \sum_{i=1}^3 A_i \exp(j2\pi f_0 t + j\pi r_i t^2 + j\varphi_i) \quad (4.4)$$

gdzie  $f_0 = -1500$  Hz,  $r_1 = 1000$  Hz/s,  $r_2 = 2000$  Hz/s oraz  $r_3 = 3000$  Hz/s. Fazy początkowe wynoszą odpowiednio:  $\varphi_1 = 0.4\pi$ ,  $\varphi_2 = 0.8\pi$  oraz  $\varphi_3 = 1.6\pi$ . Amplitudy poszczególnych komponentów przyjęto następująco:  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 2$  oraz



Rysunek 4.6: A) Spektrogram klasyczny sygnału składającego się z trzech linearnie modulowanych częstotliwościowo świergotów oraz B) odpowiadający mu rozkład CICR.



Rysunek 4.7: A) Spektrogram klasyczny sygnału „cross-chirp” oraz B) odpowiadający mu rozkład CICR.

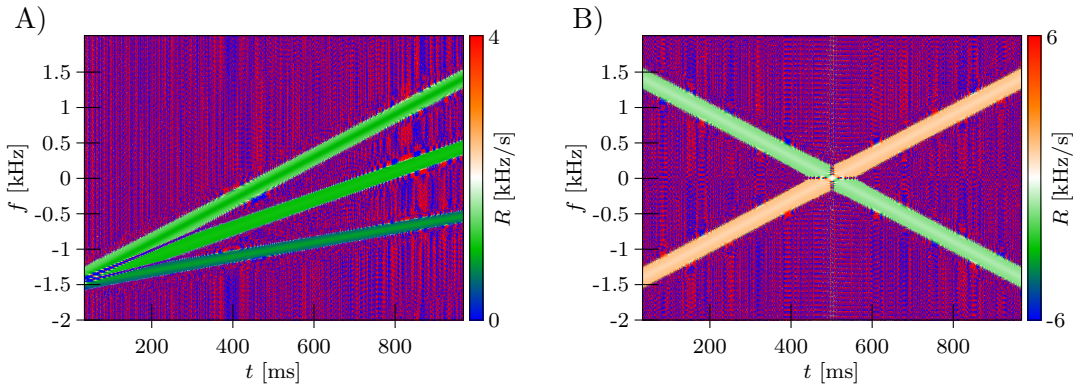
$A_3 = 4$ . Kolejnym sygnałem jaki poddano analizie jest sygnał dwu-składnikowy znany pod nazwą „cross-chirp”. Może on być wyrażony następującym wzorem:

$$u_{c\text{-chirp}}(t) = \exp(j\pi(2f_0t + r_3t^2 + 0.5)) + \exp(j\pi(-2f_0t - r_3t^2 + 1.5)). \quad (4.5)$$

Sygnał ten wybrano aby podkreślić możliwości estymacji zarówno dodatnich jak i ujemnych zmian CIF, co przedstawiono na rys. 4.7.B. Zobrazowania obydwu sygnałów:  $u_{c\text{-chirp}}(t)$  oraz  $u_{3\text{-chirp}}(t)$  zaprezentowano dla przedziału czasu obserwacji w przybliżeniu wynoszącego (0, 1) [s]. Ponieważ obydwa sygnały składają się ze świergotów o liniowo modulowanej częstotliwości, na podstawie spektrogramów 4.6.A i 4.7.A można stosunkowo łatwo oszacować zadane współczynniki *chirp rate* dla wszystkich rozpatrywanych komponentów. Dodatkowo analizując opis analityczny przedstawionych sygnałów można wywnioskować, iż w tych miejscach płaszczyzny czas-częstotliwość, w których jeden z komponentów jest dominujący, szacowana wartość CICR zgadza się z intuicyjnym postrzeganiem dynamiki częstotliwości chwilowej tego komponentów. Na rysunkach przedstawiających rozkłady CICR zastosowano skale barw do oznaczenia ich wartości. Jeżeli dana wartość wykracza poza zakres skali to na zobrazowaniu oznaczono ją odpowiednio albo niebieską albo czerwoną w zależności czy wykracza poza dolną, czy górną granicę skali.

Na rys. 4.8 przedstawiono rozkłady CIAA dwóch wymienionych wcześniej sygnałów  $u_{3\text{-chirp}}(t)$  oraz  $u_{c\text{-chirp}}(t)$ . Oceniając intuicyjnie te zobrazowania nasuwa się jeden podstawowy wniosek, iż szacowane wartości w miejscach, w których dominuje jeden komponent, nie oddają bezpośrednio zadanych parametrów *chirp rate* tak dobrze jak odpowiadające im rozkłady CICR. Ponieważ STFT można traktować jak ciąg widm chwilowych obliczanych w poszczególnych chwilach czasu, obszar w którym dominuje dany komponent zależy m. in. od zasięgu listka głównego oraz od efektywnego czasu trwania okna analizującego.

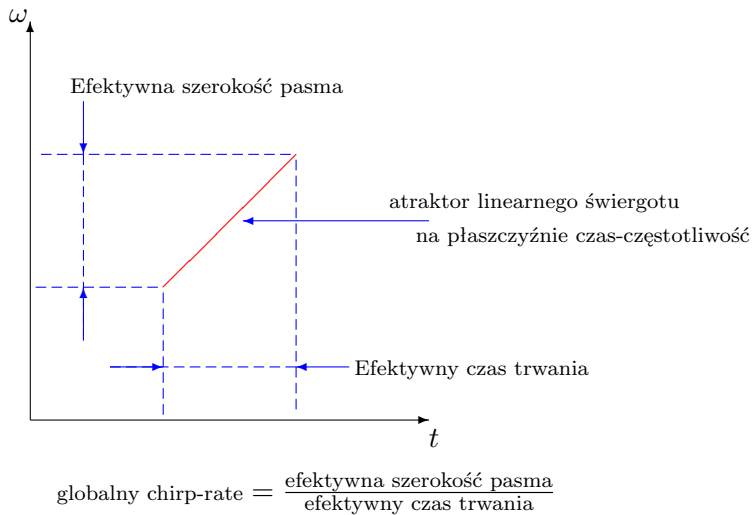




Rysunek 4.8: Rozkłady kanałowego chwilowego przyspieszenia fazy obliczone: A) dla sygnału składającego się z trzech modulowanych częstotliwościowo świergotów oraz B) dla sygnału „cross-chirp” .

### Interpretacja makroskopowa

W ujęciu klasycznym „szybkość świergotu” (ang. *chirp rate*) o liniowo przyrastającej częstotliwości można oszacować dzieląc pasmo jakie jest przemiatane przez rozpatrywany okres czasu, tak jak przedstawiono to na rys. 4.9. Dokładnie ta sama koncepcja przyświecała przy definiowaniu nowej reprezentacji sygnału, jaką jest CICR. Klasyczne podejście zmodyfikowano poprzez zastosowanie szacowanych lokalnie na płaszczyźnie czas-częstotliwość rozkładów: SCIBW oraz



Rysunek 4.9: Schemat przedstawiający interpretację makroskopową akcelerogramu kanałowej fazy chwilowej na przykładzie sygnału świergotowego o liniowo przyrastającej częstotliwości chwilowej.

SLGDR. Dzięki zastosowaniu tych **znakowanych** reprezentacji możliwe stało się szacowanie zarówno dodatnich jak i ujemnych wartości akcelerogramu fazy chwilowej komponentów sygnału, które przecież z całą pewnością mają jasne fizyczne uzasadnienie. Akcelerogram kanałowej fazy chwilowej stanowi istotny wkład w dyskusję nad sensem wprowadzenia wielkości fizycznych wyrażających „ujemny czas trwania” oraz „ujemną szerokość pasma sygnału”.

## Badanie wpływu szerokości okna analizującego na CICR

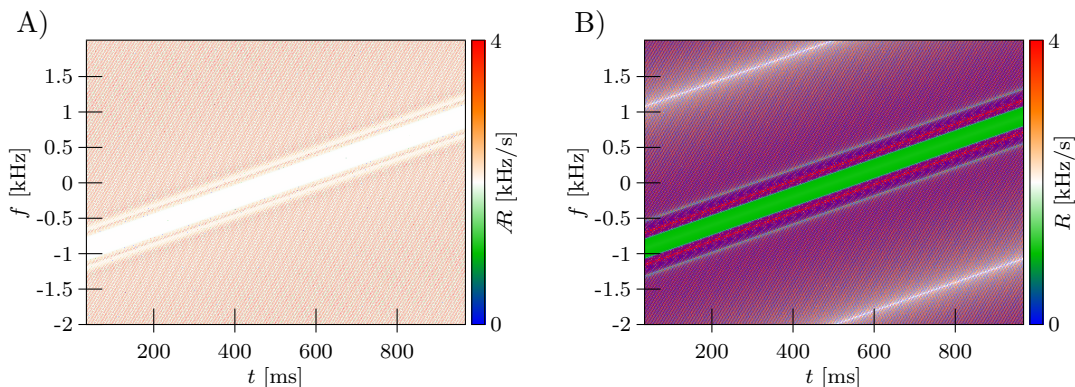
Aby rozstrzygnąć kwestię interpretacji CICR i CIAA przeprowadzono eksperyment polegający na obliczeniu średniej wartości odchylenia tych reprezentacji (RMSE) od zadanego parametru *chirp rate* dla sygnału świergotowego składającego się tylko z jednego komponentu o liniowo przyrastającej częstotliwości chwilowej (ang. *LFM chirp*). Błąd średniokwadratowy obliczono w zależności od efektywnej szerokości okna analizującego. Wzór na obliczenie RMSE dla reprezentacji CICR wygląda następująco:

$$\sigma_{\mathcal{R}}^2 = \int_{t_0}^{t_1} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{R}(t, \omega) - r_0)^2 E(t, \omega) d\omega dt / W_{\text{sum}} \quad (4.6)$$

oraz analogicznie dla CIAA:

$$\sigma_R^2 = \int_{t_0}^{t_1} \int_{-\infty}^{\infty} (R(t, \omega) - r_0)^2 E(t, \omega) d\omega dt / W_{\text{sum}}, \quad (4.7)$$

gdzie  $\sigma_{\mathcal{R}}$  oraz  $\sigma_R$  oznaczają odchylenia standardowe od zadanej wartości  $r_0$  obliczane odpowiednio dla reprezentacji CICR i CIAA,  $E(t, \omega)$  oznacza gęstości energii w dziedzinie czas-częstotliwość,  $r_0 = r_2 = 2000$  Hz/s, natomiast  $W_{\text{sum}}$  to skumulowana energia sygnału z przedziału czasu  $(t_0, t_1) = (0, 1)$  [s]. Użyty tu sygnał



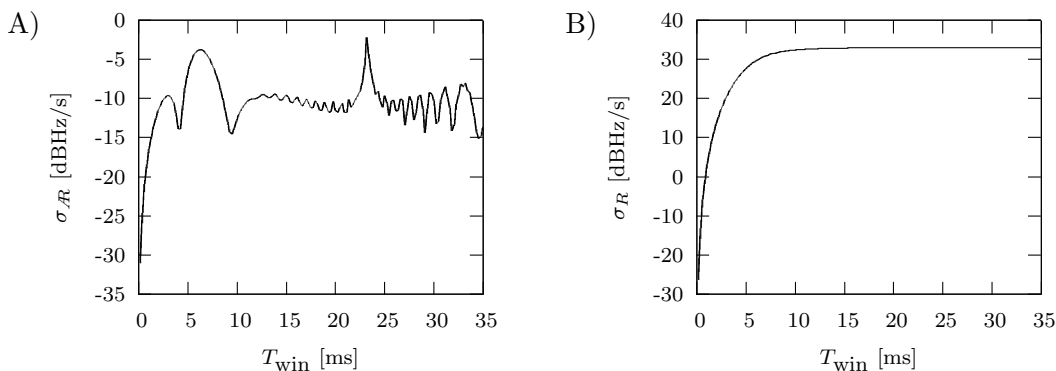
Rysunek 4.10: Rozkłady A) CICR i B) CIAA obliczone dla jednoskładnikowego świergotu o liniowo modulowanej częstotliwości, którego parametr *chirp rate* wynosi 2000 Hz/s.

testowy, którego spektrogramy przedstawiono na rys. 2.1.C i 3.1, można wyrazić następującym wzorem:

$$u_{\text{chirp}}(t) = \exp(j\pi(2f_1t + r_0t^2)), \quad (4.8)$$

gdzie  $f_1 = -1000$  Hz.

Na rys. 4.11 przedstawiono zależności odchylenia standardowego od efektywnej szerokości okna analizującego. Z uzyskanych wyników można wywnioskować, iż reprezentacja CIAA jest tym lepszą estymatą zadanego parametru *chirp rate*, im okno analizujące jest węższe. Gdy tymczasem dla reprezentacji CICR uzyskano stosunkowo niewielki błąd średniokwadratowy w całym rozpatrywanym przedziale – średnio kilka rzędów mniejszy, niż dla reprezentacji CIAA, co jednoznacznie świadczy o przydatności nowo zaproponowanej reprezentacji CICR. Wykres odchylenia standardowego dla reprezentacji CICR ma dość regularny kształt stąd wniosek, iż jego zmiany zależą od zasięgu listków okna analizującego występujących w charakterystyce amplitudowej okna. Rozkład listków uwidacznia się w uzyskanej STFT, a co za tym idzie, również w CICR, głównie w tych miejscach, w których występują głębokie zaniki energii. Należy zauważyć, iż zarówno SCIBW, jak i SLGDR w miejscu występowania atraktora zmieniają znak na przeciwny. Wyniku tego w tym miejscu występuje symbol nieoznaczony (zero nad zero), który może spowodować pojawienie się „szpilek” w numerycznie obliczanych reprezentacjach i rzutować na szacowane w niniejszym punkcie odchylenia standardowe. Dodatkowo w obecności dodawanego szumu białego mianownik może przyjmować bardzo małe wartości (w tym również zero). Dlatego konieczne było wygładzenie uzyskanego zobrazowania filtrem uśredniającym. W tym celu zastosowano dwuwymiarowy filtr medianowy o rozmiarach maski  $1 \times 9$  oraz  $9 \times 9$ .



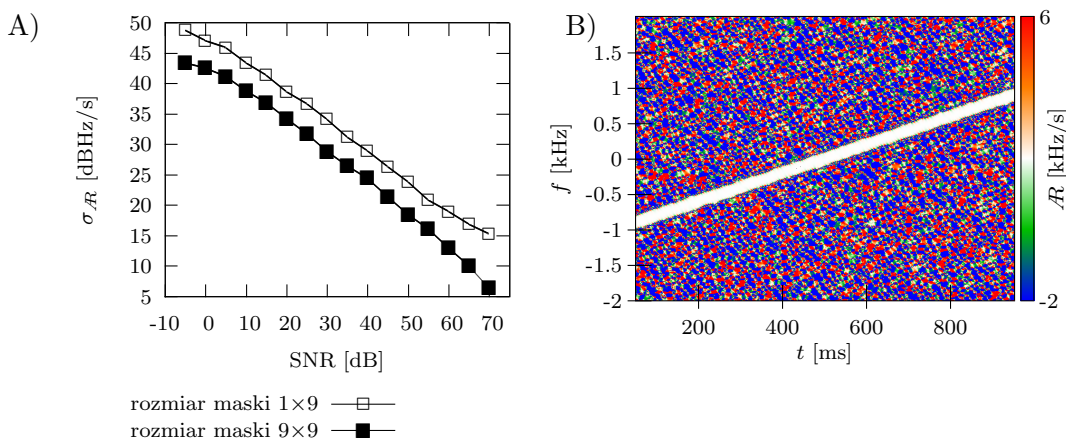
Rysunek 4.11: Zależności odchylenia standardowego estymacji parametru *chirp-rate* od efektywnej szerokości okna dla rozkładów: A) CICR oraz B) CIAA. Analizie poddano linearny świergot  $u_{\text{chirp}}(t)$ , którego przyrost częstotliwości chwilowej wynosi 2000 Hz/s. Wszystkie uzyskane rozkłady były poddawane wygładzaniu filtrem medianowym, którego rozmiar maski wynosił  $9 \times 9$ .

## Badanie wpływu szumu białego na CICR

Aby zbadać odporność proponowanego rozwiązania na oddziaływanie szumu białego sporządzono charakterystyki szumowe przedstawione na rys. 4.12.A. Charakterystyki obliczono dla jednoskładnikowego sygnału świergotowego, którego częstotliwość chwilowa przyrasta liniowo. Dlatego bezpośrednim następstwem jest założenie stałego parametru *chirp-rate* w całym analizowanym fragmencie płaszczyzny czas-częstotliwość.

Uzyskane charakterystyki świadczą o stosunkowo dużej wrażliwości algorytmu na oddziaływanie białego szumu addytywnego. Jest to uzasadnione, gdyż pochodne fazy chwilowej sygnału są również wrażliwe na działanie szumu. Na korzyść proponowanej metody „przemawia” fakt, iż energia sygnału jest zazwyczaj skoncentrowana w pewnych fragmentach płaszczyzny czas częstotliwość, natomiast rozkład szumu białego z definicji jest równomierny w całej płaszczyźnie. Dzięki czemu energia sygnału użytecznego, w rozpatrywanej sytuacji świergotu, w miejscach swojej koncentracji znacznie przewyższa poziom szumu nawet jeśli iloraz SNR wynosi około zera dB i ułatwia prawidłową estymację CICR.

Dodatkowo jednym ze sposobów usprawnienia metody jest wygładzenie rozkładu CICR np. filtrem medianowym. Na rys. 4.12.A zaprezentowano charakterystyki dla różnych rozmiarów maski filtra medianowego.



Rysunek 4.12: A) Zależności odchylenia standardowego estymacji parametru *chirp-rate* od ilorazu SNR obliczone dla linearnego świergotu  $u_{\text{chirp}}(t)$ , którego *chirp-rate* wynosi  $r_0=2000$  Hz/s. Efektywna szerokość okna analizującego wynosiła ok.  $T_{\text{win}} \approx 4.1$  ms. Akcelerogramy były wygładzane dwoma filtrami medianowymi o rozmiarach masek odpowiednio  $1 \times 9$  oraz  $9 \times 9$ . B) Akcelerogram kanałowej fazy chwilowej sygnału wygładzony filtrem medianowym o rozmiarze maski  $9 \times 9$  do analizowanego sygnału świergotowego został dodany szum biały; SNR wynosi około 30 dB.

### 4.2.2 Sygnały AM/FM

Aby dokonać estymacji dynamiki częstotliwości chwilowej komponentów modulowanych częstotliwościowo i jednocześnie amplitudowo należy wcześniej podzielić amplitudę STFT przez wartość amplitudy w miejscu występowania odpowiedniego atraktora, którego położenie, tak jak już wcześniej wspomniano można oszacować na podstawie rozkładów CIF oraz LGD. Postępowanie to zneutralizuje wpływ modulacji amplitudy chwilowej poszczególnych komponentów sygnału na estymowaną dynamikę fazy chwilowej. A zatem, wzór stosowany dla sygnałów FM (4.2) należy przekształcić do następującej postaci:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}(t, \omega) &= \frac{\frac{\partial}{\partial t} \ln \left\{ A(t, \omega) / A\left(t - \frac{\partial}{\partial \omega} \phi(t, \omega), \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, \omega)\right) \right\}}{\frac{\partial}{\partial \omega} \ln \left\{ A(t, \omega) / A\left(t - \frac{\partial}{\partial \omega} \phi(t, \omega), \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, \omega)\right) \right\}} = \\
 &= \frac{\frac{\partial}{\partial t} \ln \left\{ A(t, \omega) / A\left(t - D(t, \omega), \Omega(t, \omega)\right) \right\}}{\frac{\partial}{\partial \omega} \ln \left\{ A(t, \omega) / A\left(t - D(t, \omega), \Omega(t, \omega)\right) \right\}} = \\
 &= \frac{\frac{\partial}{\partial t} \ln \left\{ A(t, \omega) \right\} - \frac{\partial}{\partial t} \ln \left\{ A\left(t - D(t, \omega), \Omega(t, \omega)\right) \right\}}{\frac{\partial}{\partial \omega} \ln \left\{ A(t, \omega) \right\} - \frac{\partial}{\partial \omega} \ln \left\{ A\left(t - D(t, \omega), \Omega(t, \omega)\right) \right\}} = \\
 &= \frac{\frac{\partial}{\partial t} \Lambda(t, \omega) - \frac{\partial}{\partial t} \Lambda\left(t - D(t, \omega), \Omega(t, \omega)\right)}{\frac{\partial}{\partial \omega} \Lambda(t, \omega) - \frac{\partial}{\partial \omega} \Lambda\left(t - D(t, \omega), \Omega(t, \omega)\right)} \cong \\
 &\cong \frac{\Sigma(t, \omega) - \Sigma\left(t - D(t, \omega), \Omega(t, \omega)\right)}{\mathcal{U}(t, \omega) - \mathcal{U}\left(t - D(t, \omega), \Omega(t, \omega)\right)}; \quad D(t, \omega) \neq 0 \vee \Omega(t, \omega) \neq \omega,
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

gdzie  $A(t, \omega)$  oznacza amplitudę STFT,  $D(t, \omega)$  lokalne opóźnienie grupowe, natomiast  $\Omega(t, \omega)$  reprezentuje kanałową pulsację chwilową. W porównaniu do wzoru (4.2) przeznaczonego do estymacji akcelerogramu kanałowej fazy chwilowej sygnałów niemodulowanych amplitudowo, w powyższym przepisie zastosowano normalizację, która ma na celu usunięcie skutków modulacji amplitudy chwilowej poszczególnych składników sygnału. Wzór (4.9) jest uniwersalny i może być stosowany, zarówno do analizy sygnałów modulowanych amplitudowo, jak i do tych które mają stałą niemodulowaną amplitudę. Natomiast wzór (4.2) jest wprowadzony wcześniej, w celu omówienia drogi prowadzącej do ostatecznej metody estymacji CICR.

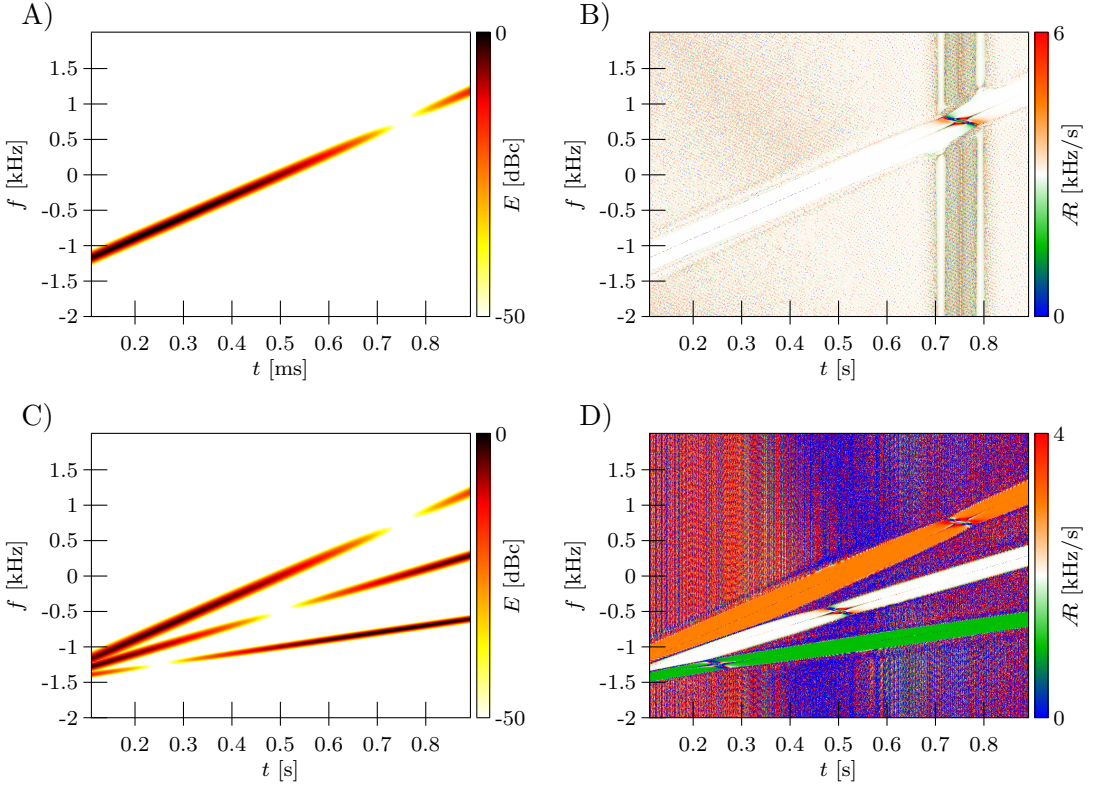
Oszacowane rozkłady CICR, podobnie jak STFT, podlegają zasadzie nieoznaczoności Heisenberga-Gabora. Oznacza to, iż dobór odpowiedniego okna analizującego jest szczególnie ważnym zagadnieniem. Z poczynionych obserwacji wynika, iż estymowana w wybranym punkcie płaszczyzny czas-częstotliwość wartość CICR jest średnią (ważoną energią spektrogramu) zakładanego parametru *chirp-rate* z obszar nieoznaczoności okna analizującego.

Na rys. 4.13 przedstawiono wyniki analizy: AB) świergotu o liniowo zmiennej częstotliwości chwilowej i modulowanej amplitudzie chwilowej, wyrażonego następującym wzorem analitycznym:

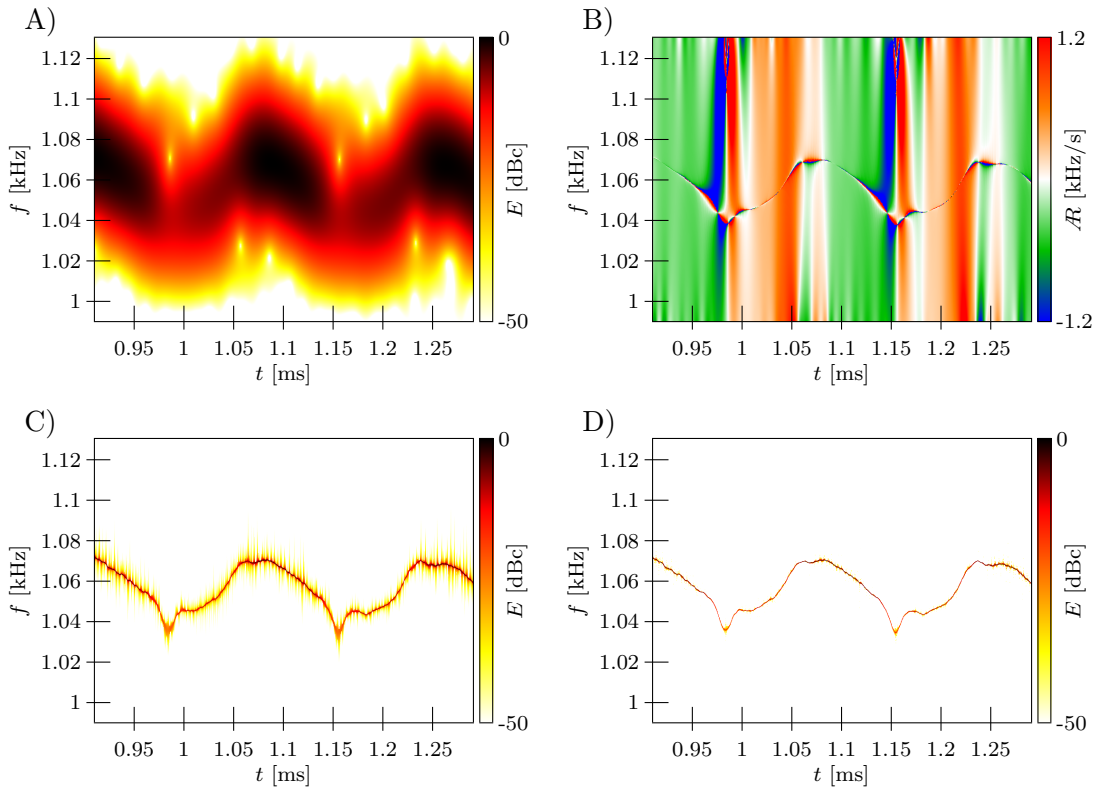
$$u_{\text{am-chirp}}(t) = (1 + \sin(2\pi t)) \exp(j\pi(2f_1 t + r_3 t^2)) \quad (4.10)$$

oraz CD) sygnału składającego się z trzech komponentów świergotowych niezależnie modulowanych amplitudowo, który może być opisany następującym wzorem analitycznym:

$$u_{\text{am-3-chirp}}(t) = (1 - \sin(2\pi t)) \exp(j\pi(2f_1 t + r_1 t^2)) + \\ + (1 + \cos(2\pi t)) \exp(j\pi(2f_1 t + r_2 t^2)) + \\ + (1 + \sin(2\pi t)) \exp(j\pi(2f_1 t + r_3 t^2)). \quad (4.11)$$



Rysunek 4.13: AC) Spektrogramy klasyczne oraz BD) akcelerogramy kanałowej fazy chwilowej sporządzone bez użycia filtra medianowego medianowego AB) dla sygnału świergotowego o modulowanej amplitudzie chwilowej oraz CD) dla sygnału składającego się z trzech komponentów, z których każdy jest niezależnie modulowany amplitudowo. Efektywna szerokość okna analizującego wynosiła ok.  $T_{\text{win}} \approx 7.2$  ms.



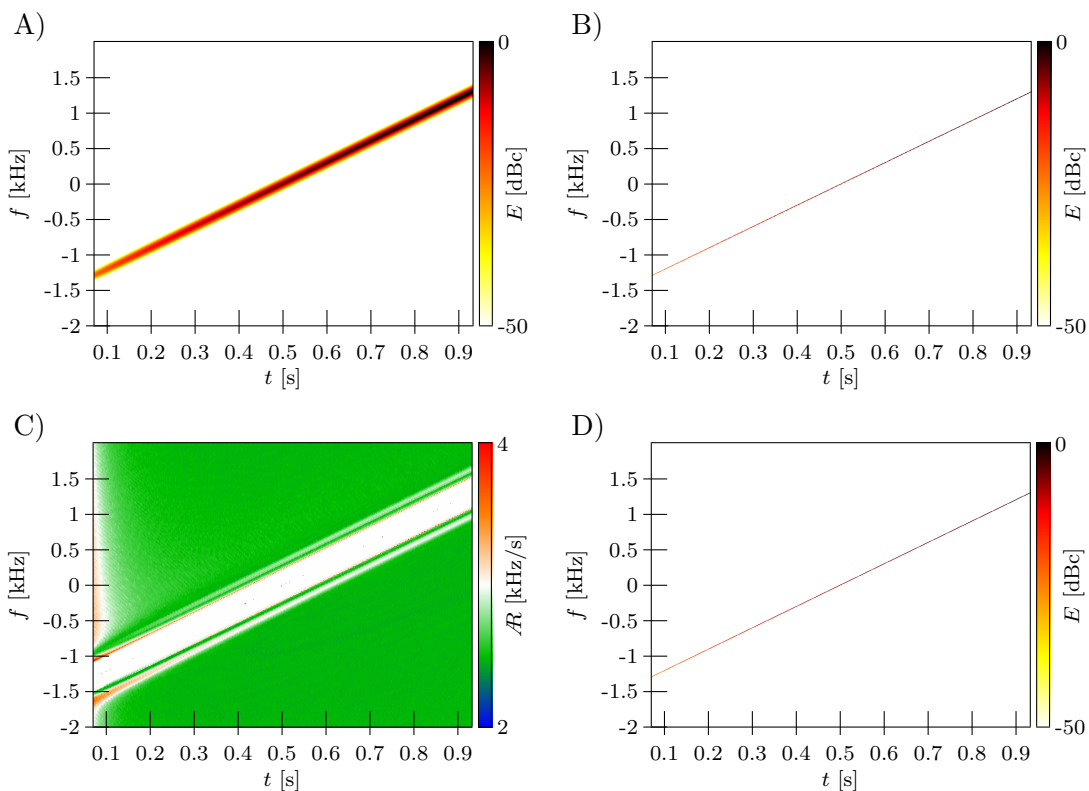
Rysunek 4.14: Analiza dźwięku fletu – efekt vibrato. A) Spektrogram klasyczny oraz B) odpowiadający mu rozkład CICR ( $T_{\text{win}} \approx 20.5$  ms) sporządzony bez użycia filtra medianowego medianowego. C) Spektrogram skoncentrowany oraz D) atraktogram ( $T_{\text{win}} \approx 1.05$  ms,  $\alpha_\chi = 0.001$ ).

Zobrazowania 4.13AC) to spektrogramy klasyczne, natomiast zobrazowania 4.13BD) przedstawiają odpowiednie rozkłady CICR. Na rys. 4.14 przedstawiono wyniki analizy fragmentu dźwięku fletu (efekt vibrato). Amplituda oraz częstotliwość chwilowa sygnału była modulowana tak, jak przedstawiono to na towarzyszących rozkładach energii.



### 4.3 Analiza wybranych sygnałów syntetycznych

Zaproponowane w niniejszej pracy metody analizy dają w wyniku nowe, nie znane wcześniej, reprezentacje sygnału tj. atraktogram oraz akcelerogram kanałowej fazy chwilowej. Aby mieć pewne wyobrażenie na temat ich właściwości, w niniejszej części pracy dokonano analizy szeregu specjalnie do tego celu spreparowanych sygnałów syntetycznych – wygenerowanych numerycznie jako ciągi próbek i poddanych analizie dyskretnoczasowymi wersjami prezentowanych estymatorów. Wśród nich znajdują się zarówno sygnały wieloskładnikowe, jak i sygnały składające się tylko z jednego modulowanego komponentu. Do części sygnałów został dodany numerycznie wygenerowany szum biały.

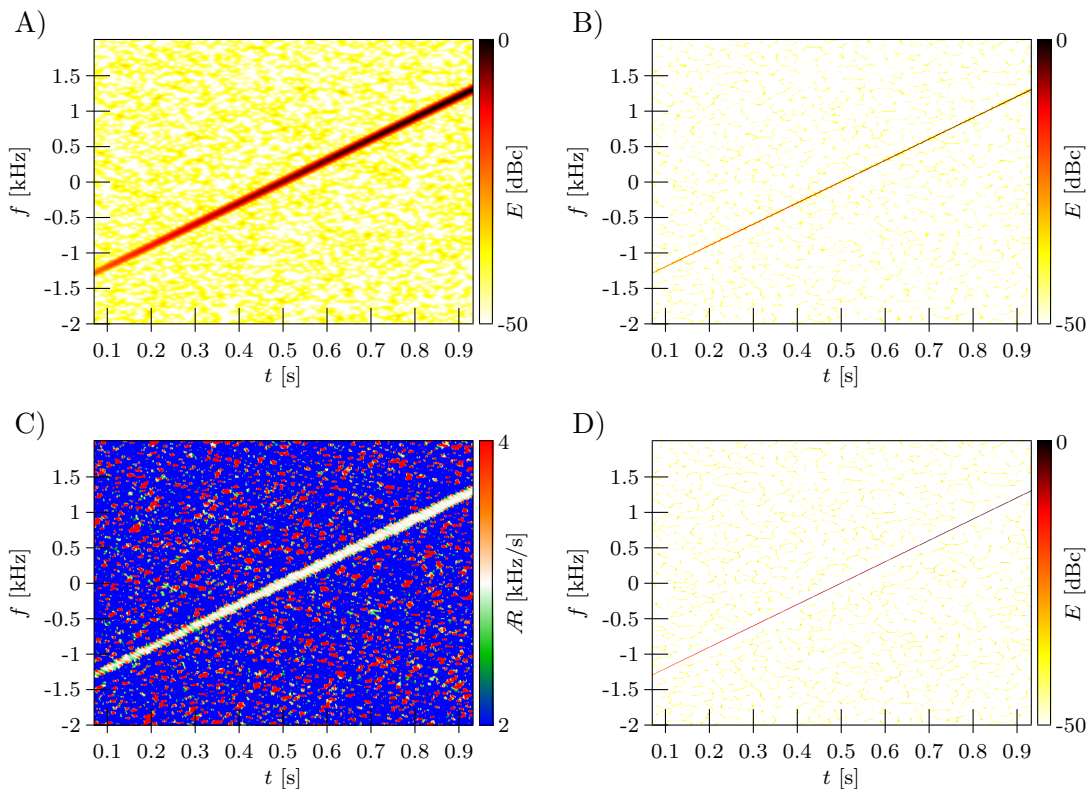


Rysunek 4.15: Analiza syntetycznego sygnału  $u_{\text{lam-chirp}}(t)$  ( $T_{\text{win}} \approx 5.1$  ms). A) Spektrogram klasyczny, B) spektrogram skoncentrowany, C) akcelerogram kanałowej fazy chwilowej, D) atraktogram ( $\alpha_\chi = 0.1$ ).



Szczególnie istotne jest zbadanie wpływu modulacji amplitudy chwilowej analizowanego sygnału na obciążenie estymatora CICR. Jak wynika ze wzoru (4.9), działanie estymatora CICR jest ściśle powiązane z amplitudą STFT, natomiast w założeniu uzyskana estymata nie powinna być zależna od powolnej modulacji amplitudy chwilowej sygnału. Aby udowodnić, że tak właśnie jest, przy definiowaniu akcelero grafu kanałowej fazy chwilowej pokazano przykładową analizę dwóch sygnałów ze zmodulowaną amplitudą chwilową: (4.10) oraz (4.11). W niniejszym punkcie rozszerzono gamę analizowanych sygnałów tego typu. Na rys. 4.15 zaprezentowano zobrazenia następującego sygnału z linearnie modulowaną amplitudą i częstotliwością chwilową:

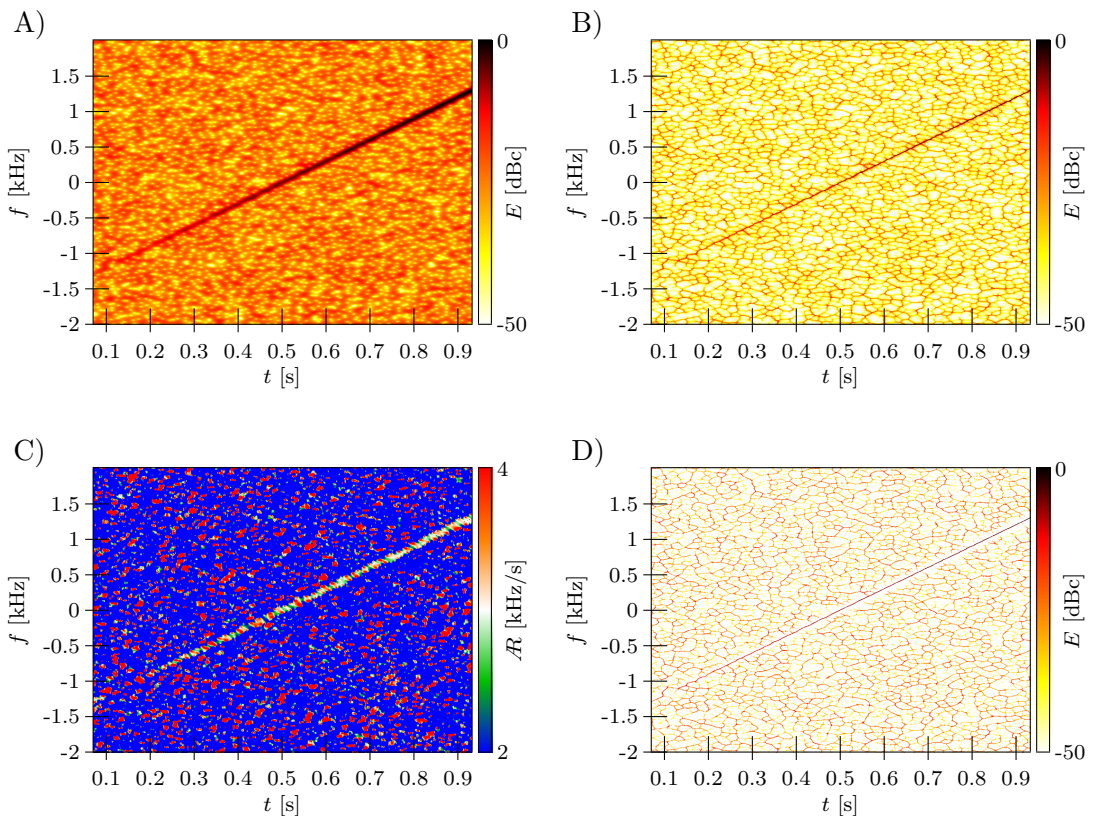
$$u_{\text{lam-chirp}}(t) = t \exp(j2\pi f_1 t + j\pi r_3 t^2), \quad t \in (0, 1)[\text{s}]. \quad (4.12)$$



Rysunek 4.16: Analiza syntetycznego sygnału  $u_{\text{lam-chirp}}(t)$  z dodanym białym szumem Gaussowskim ( $\text{SNR} \approx 20$  dB,  $T_{\text{win}} \approx 5.1$  ms). A) Spektrogram klasyczny, B) spektrogram skoncentrowany, C) akcelero graf kanałowej fazy chwilowej, D) atraktogram ( $\alpha_\chi = 0.1$ ).

Ponadto zobrazowania na rys. 4.16 oraz 4.17 ukazują wpływ szumu białego na wyniki analizy tego sygnału. Iloraz SNR jest w przybliżeniu równy odpowiednio 20 i 0 decybeli – na znacznej części prezentowanej płaszczyzny gęstość energii szumu białego przewyższa gęstość energii sygnału użytecznego – tu  $u_{\text{lam-chirp}}(t)$ . Amplituda chwilowa sygnału stopniowo rośnie, zatem dodatkowo można zaobserwować zmniejszanie się wpływu szumu białego wraz z upływem czasu.

STFT jest wynikiem splotu modulowanej funkcji okna analizującego z sygnałem, dlatego w spektrogramie da się zauważyć zasięg tzw. listka głównego okna analizującego typu Blackmana-Harrisa w w pobliżu atraktora. W tych właśnie fragmentach płaszczyzny czas-częstotliwość otrzymano bliskie przybliżenie estymaty CICR do założonego parametru *chirp-rate*. Uwzględniając znaczny poziom energii sygnału użytecznego w tych lokalizacjach, należy to odczytywać jako zaletę proponowanej metody.

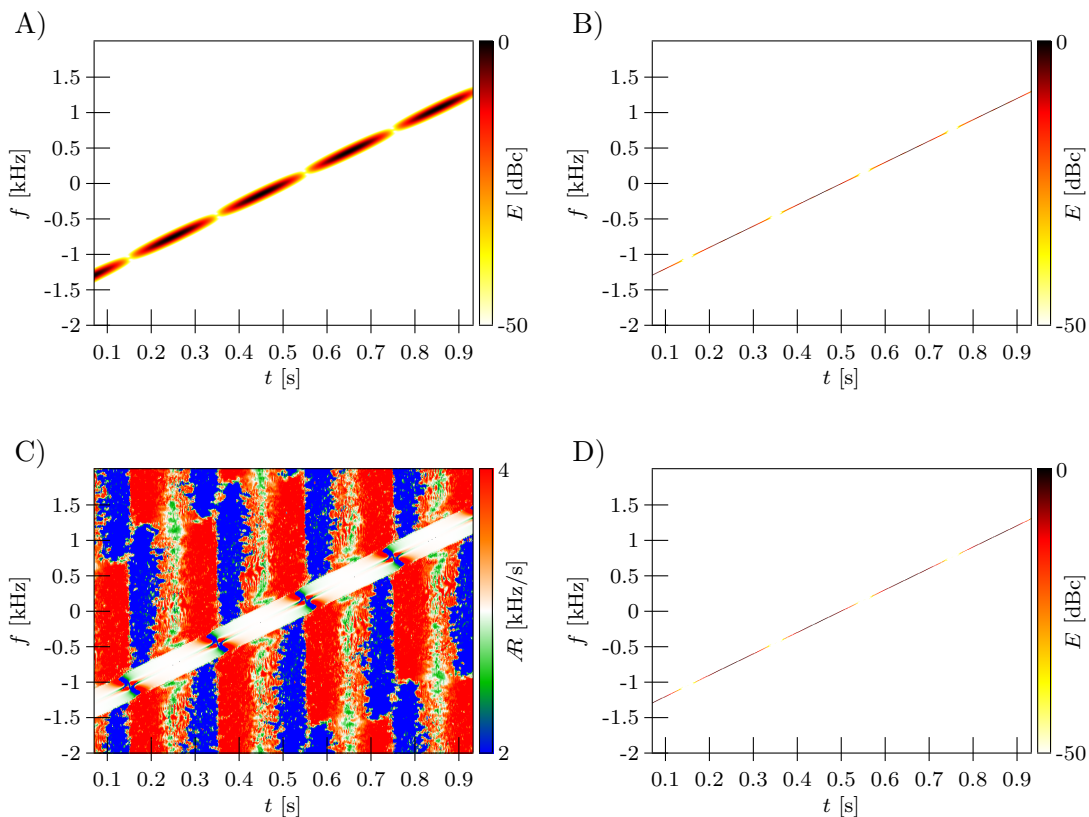


Rysunek 4.17: Analiza syntetycznego sygnału  $u_{\text{lam-chirp}}(t)$  z dodanym białym szumem Gaussowskim (SNR  $\approx 0$  dB,  $T_{\text{win}} \approx 5.1$  ms). A) Spektrogram klasyczny, B) spektrogram skoncentrowany, C) akcelerogram kanałowej fazy chwilowej, D) atraktogram ( $\alpha_\chi = 0.1$ ).

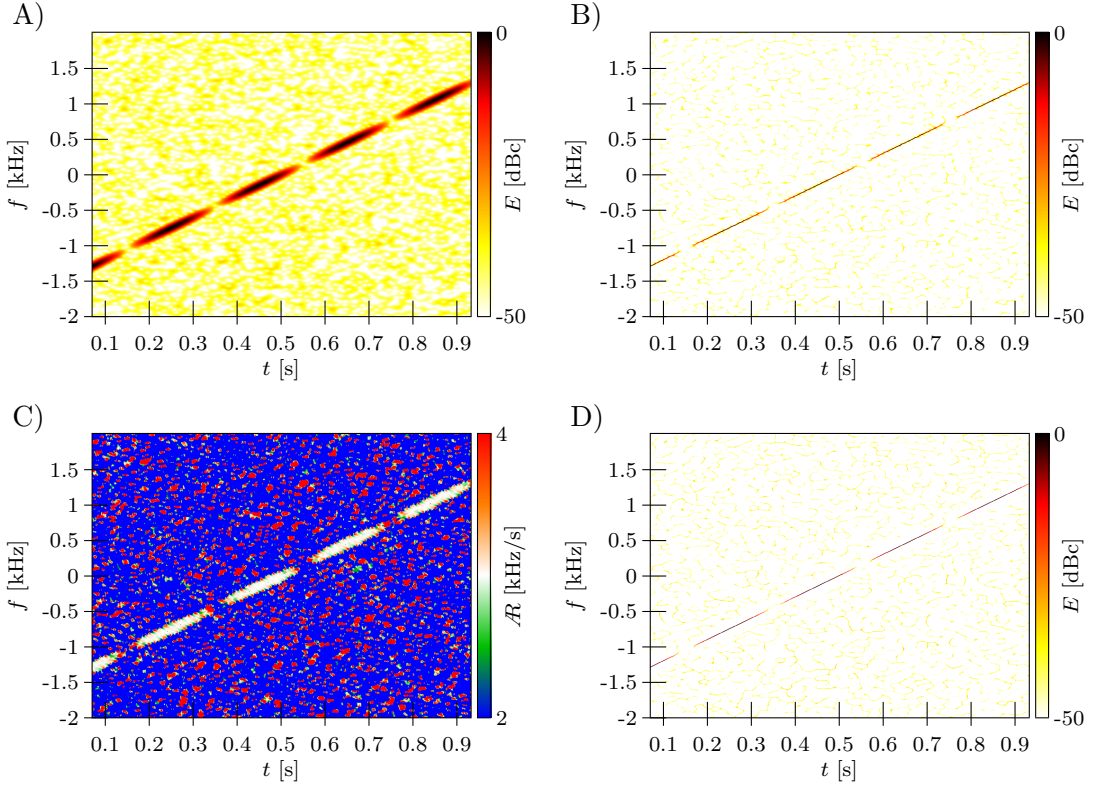
Kolejny sygnał świergotowy poddany analizie można wyrazić następującym wzorem analitycznym:

$$u_{\text{sin-chirp}}(t) = \left(1 + \sin(10\pi t)\right) \exp(j2\pi f_1 t + j\pi r_3 t^2), \quad t \in (0, 1)[\text{s}]. \quad (4.13)$$

W porównaniu do poprzedniego sygnału, tu amplituda chwilowa jest szybciej modulowana, pomimo to zobrazowania na rys. 4.18C oraz 4.22C, w miejscach koncentracji energii sygnału użytecznego, przedstawiają oczekiwane wartości estymowanego parametru CICR, czyli  $r_3 = 3000$  Hz/s.



Rysunek 4.18: Analiza syntetycznego sygnału  $u_{\text{sin-chirp}}(t)$  z dodanym białym szumem Gaussowskim ( $\text{SNR} \approx 0$  dB,  $T_{\text{win}} \approx 5.1$  ms). A) Spektrogram klasyczny, B) spektrogram skoncentrowany, C) akcelerogram kanałowej fazy chwilowej, D) atraktogram ( $\alpha_\chi = 0.1$ ).



Rysunek 4.19: Analiza syntetycznego sygnału  $u_{\text{sin-chirp}}(t)$  z dodanym białym szumem Gaussowskim ( $\text{SNR} \approx 0$  dB,  $T_{\text{win}} \approx 5.1$  ms). A) Spektrogram klasyczny, B) spektrogram skoncentrowany, C) akcelerogram kanałowej fazy chwilowej, D) atraktogram ( $\alpha_\chi = 0.1$ ).

Na rys. 4.20 zaprezentowano zobrazowania sygnału testowego o modulowanej częstotliwości chwilowej i stałej amplitudzie chwilowej wyrażonego następującym wzorem analitycznym:

$$u_{\text{sfm-chirp}}(t) = \exp(-j1500 \cos(2\pi f_u t)), \quad (4.14)$$

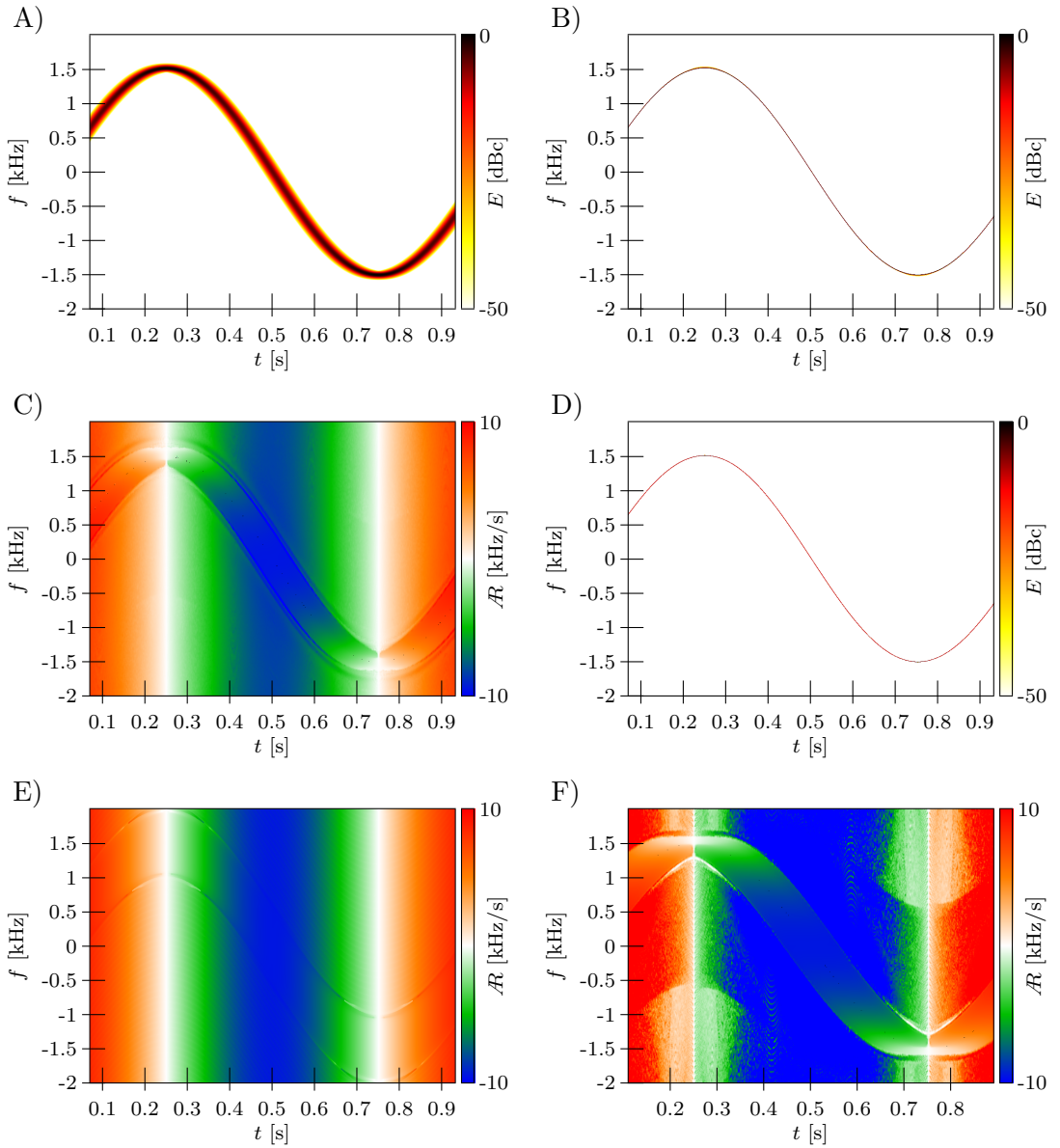
gdzie  $f_u = 1$  Hz. Ponieważ jest to sygnał jednoskładnikowy jego częstotliwość chwilową można stosunkowo łatwo wyznaczyć jako pochodną fazy chwilowej po czasie, zatem:

$$F_{\text{sfm-chirp}}(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi_{\text{sfm-chirp}}(t)}{dt} = 1500 f_u \sin(2\pi f_u t). \quad (4.15)$$

Natomiast ICR zgodnie z definicją (2.15) wynosi:

$$r_{\text{sfm-chirp}}(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d^2\varphi_{\text{sfm-chirp}}(t)}{dt^2} = 3000 \sin(2\pi f_u t). \quad (4.16)$$

Tego przebiegu należy doszukiwać się w układzie kolorów na rys. 4.20.CEF.



Rysunek 4.20: Analiza syntetycznego sygnału  $u_{\text{sfm-chirp}}(t)$  z dodanym białym szumem Gaussowskim. A) Spektrogram klasyczny, B) spektrogram skoncentrowany, CEF) akcelerogramy kanałowej fazy chwilowej, D) atraktogram ( $\alpha_{\chi} = 0.1$ ). Zobrazowania były sporządzone przy pomocy okna analizującego o efektywnej szerokości równej odpowiednio: ABCD)  $T_{\text{win}} \approx 5.1$  ms, E)  $T_{\text{win}} \approx 1.0$  ms oraz F)  $T_{\text{win}} \approx 10.0$  ms.

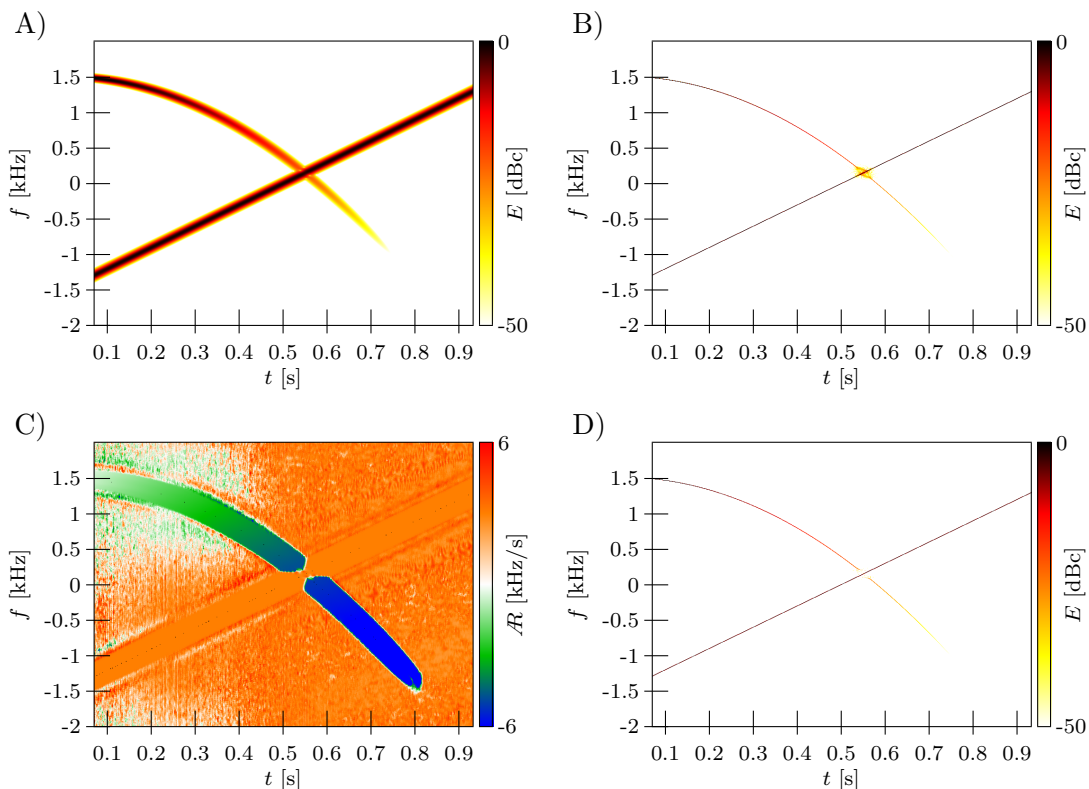
Aby zaprezentować działanie proponowanych metod analizy w takich newralgicznych punktach, jak przecięcie się dwóch komponentów sygnału, skomponowano następujący sygnał testowy:

$$u_{2\text{-chirp}}(t) = \exp(j2\pi f_1 t + j\pi r_3 t^2) + \exp(-j2\pi f_1 t + j\pi p_0 t^3) \cdot \text{blackman}(T_{\text{abs}}, t) \quad t \in (0, 1)[\text{s}], \quad (4.17)$$

gdzie  $p_0 = -3000 \text{ 1/s}^3$ , natomiast  $\text{blackman}(T_{\text{abs}}, t)$  to funkcja Blackmana o absolutnej szerokości równej  $T_{\text{abs}} = 1.6 \text{ s}$  i środku w punkcie zero (na osi czasu). Funkcja  $\text{blackman}(T_{\text{abs}}, t)$  w przedziale czasu  $(-T/2, T/2)$  jest określona następującym wzorem analitycznym:

$$\text{blackman}(T_{\text{abs}}, t) = 0.42659 + 0.49656 \cos\left(\frac{2\pi t}{T_{\text{abs}}}\right) - 0.07685 \cos\left(\frac{2\pi t}{T_{\text{abs}}}\right). \quad (4.18)$$

Poza tym przedziałem przyjmuje wartości zerowe.

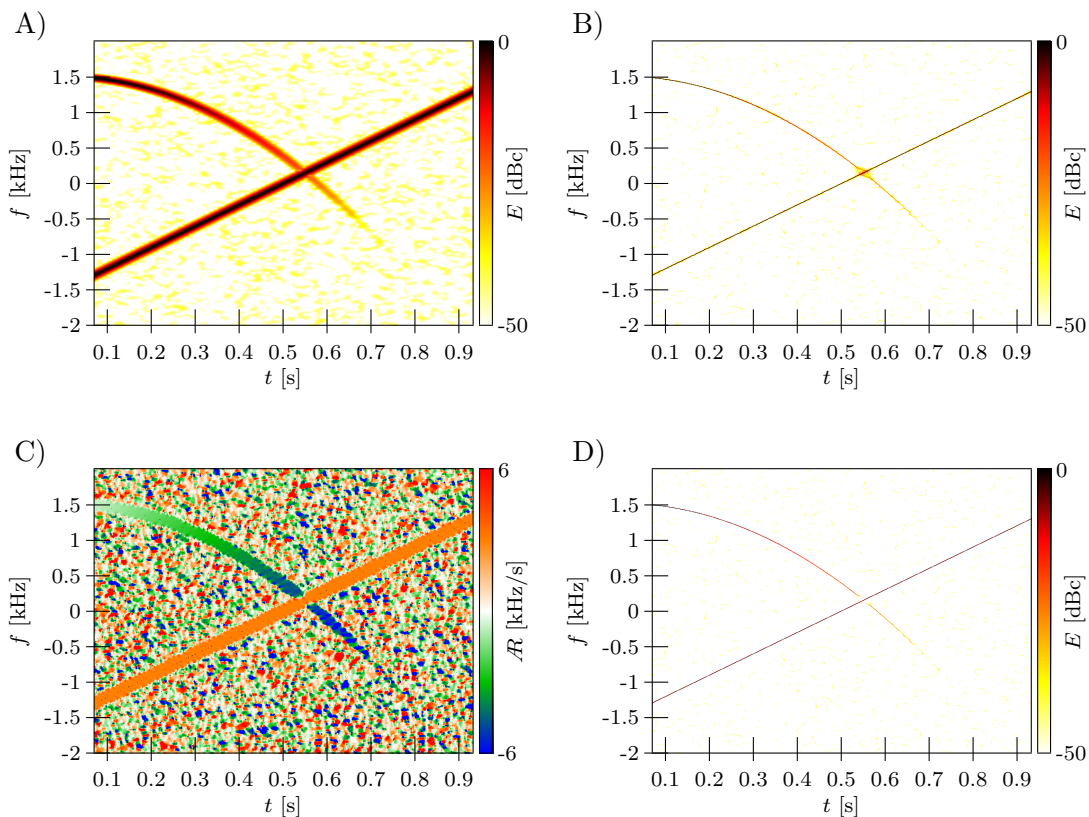


Rysunek 4.21: Analiza syntetycznego sygnału  $u_{2\text{-chirp}}(t)$  z dodanym białym szumem Gaussowskim ( $T_{\text{win}} \approx 5.1 \text{ ms}$ ). A) Spektrogram klasyczny, B) spektrogram skoncentrowany, C) akcelerogram kanałowej fazy chwilowej, D) atraktogram ( $\alpha_\chi = 0.1$ ).



Podsumowując ten fragment rozprawy można stwierdzić, iż uzyskano dobre przybliżenie CICR w miejscach płaszczyzny czas-częstotliwość odpowiadających lokalizacji reprezentacji poszczególnych składników sygnału wykluczając:

- chwile czasu, w których amplituda chwilowa sygnału nie jest gwałtownie modulowana, ani nie ulega zanikom,
- miejsca płaszczyzny czas-częstotliwość, w których gęstość energii sygnału użytecznego przewyższa gęstość energii szumu białego,
- miejsca płaszczyzny czas-częstotliwość, w których nie występują zaniki spowodowane przez splecenie sygnału ze modulowaną funkcją okna analizującego.



Rysunek 4.22: Analiza syntetycznego sygnału  $u_{2\text{-chirp}}(t)$  z dodanym białym szumem Gaussowskim ( $\text{SNR} \approx 30$  dB,  $T_{\text{win}} \approx 5.1$  ms). A) Spektrogram klasyczny, B) spektrogram skoncentrowany, C) akcelerogram kanałowej fazy chwilowej, D) atraktogram ( $\alpha_\chi = 0.1$ ).

## 4.4 Analiza wybranych sygnałów akustycznych

W ramach przeprowadzonych badań dokonano analizy nagrań dźwięków wydawanych przez różne instrumenty muzyczne głównie gitarę akustyczną. Szczególną rolę przyłożono do prezentacji zobrazowań różnych metod gry: technik (vibrato), artykulacji (legato, staccato, glissando) oraz tzw. ozdobników muzycznych (m. in. ang. *slide*, *bending*). Opracowane zobrazowania mogą pomóc zrozumieć mechanikę i sposób gry zarejestrowanych w poszczególnych nagraniach.

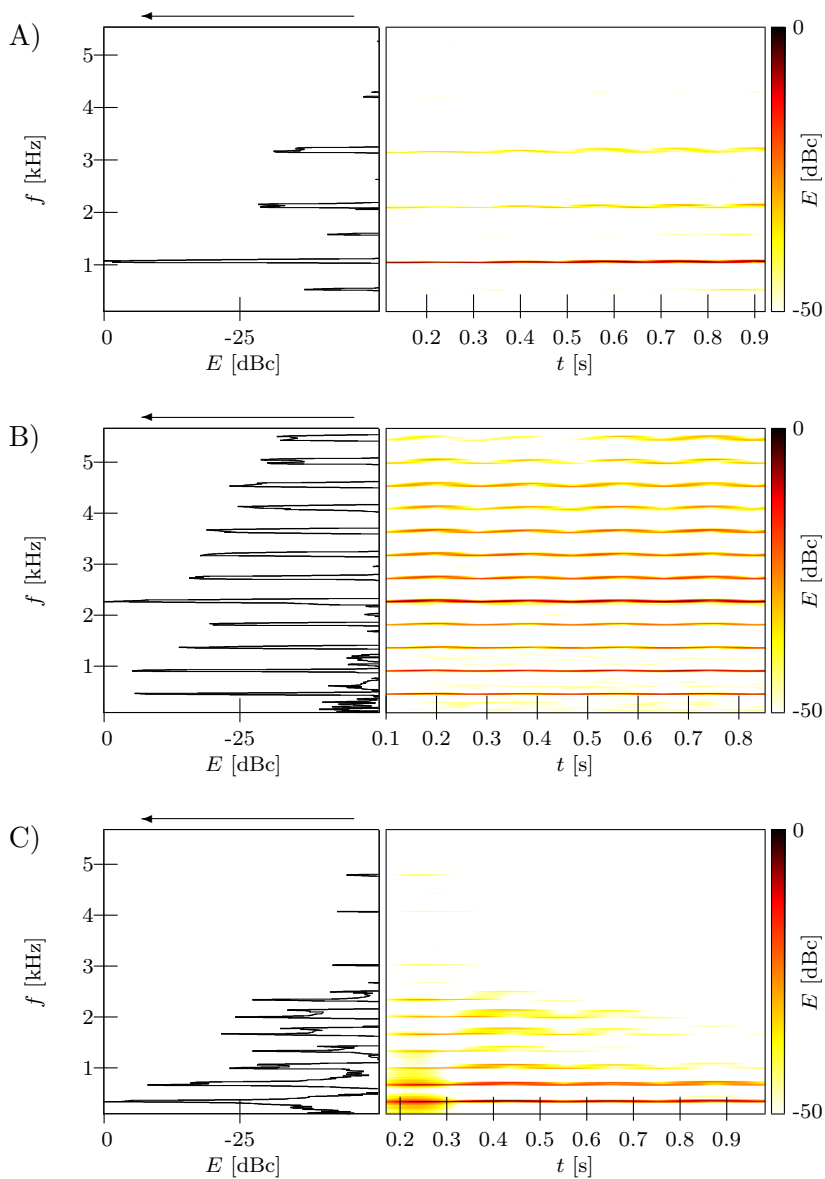
Na rys. 4.23-4.27 zaprezentowano reprezentacje sygnałów wytwarzanych przez flet, skrzypce oraz gitarę podczas grania techniką vibrato tzn. podczas rytmicznego modulowania (kanałowej) częstotliwości chwilowej. Wśród nich na szczególną uwagę zasługują akcelerogramy kanałowej fazy chwilowej umieszczone w sąsiedztwie odpowiadającym im spektrogramom klasycznym – rys. 4.27.

Na rys. 4.28 oraz 4.29 przedstawiono zobrazowania typu czas-częstotliwość efektów zwanych ang. *bending* oraz ang. *slide* granych na gitarze akustycznej. W polskim tłumaczeniu *bending* to efekt podciągnięcia struny natomiast efekt *slide* jest wytwarzany przy pomocy plastikowej tulejki przeciąganej wzdłuż gryfu gitary. Dla porównania na rys. 4.30 przedstawiono zobrazowania dla fazoletów tzn. dźwięków dla których częstotliwość chwilowa powinna pozostawać stała. Z kolei na rys. 4.31 pokazano wybrane przybliżenia prezentowanych wcześniej spektrogramów i atraktogramów.

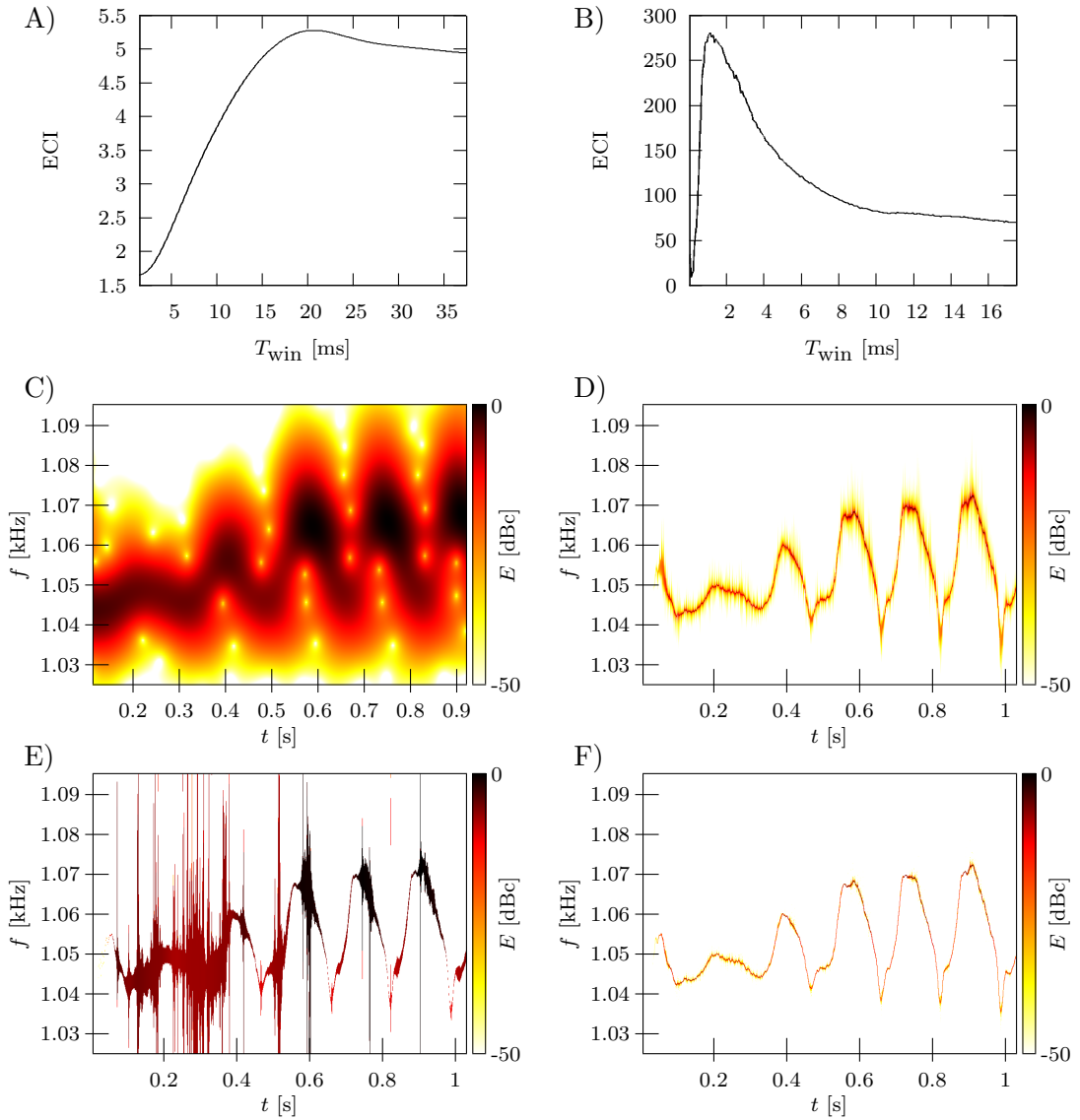
Zobrazowania prezentowane na rys. 4.32-4.35 są wynikiem analizy sekwencji kilkudziesięciu dźwięków (w notacji muzycznej zw. nutami) granych na gitarze akustycznej. Na rys. 4.32 przedstawiono efekt glissando, czyli przejście od jednego dźwięku do drugiego poprzez zagranie wszystkich pomiędzy nimi, które są możliwe do zagrania na danym instrumencie. Na gitarze glissando można zagrać poprzez przeciągnięcie palców wzdłuż gryfu przyciskając strunę do kolejnych progów w chwili, gdy dana struna wydaje dźwięk. Na rys. 4.33 zaprezentowano wyniki analizy sekwencji szybko granych nut tzw. *taping*. Natomiast na rys. 4.34-4.35 przedstawiono porównanie dwóch fragmentów tej samej melodii granych odpowiednio techniką legato i staccato.

Na rys. 4.36 zaprezentowano wyniki analizy sygnału akustycznego generowanego przez sonar aktywny (ang. *hit*).

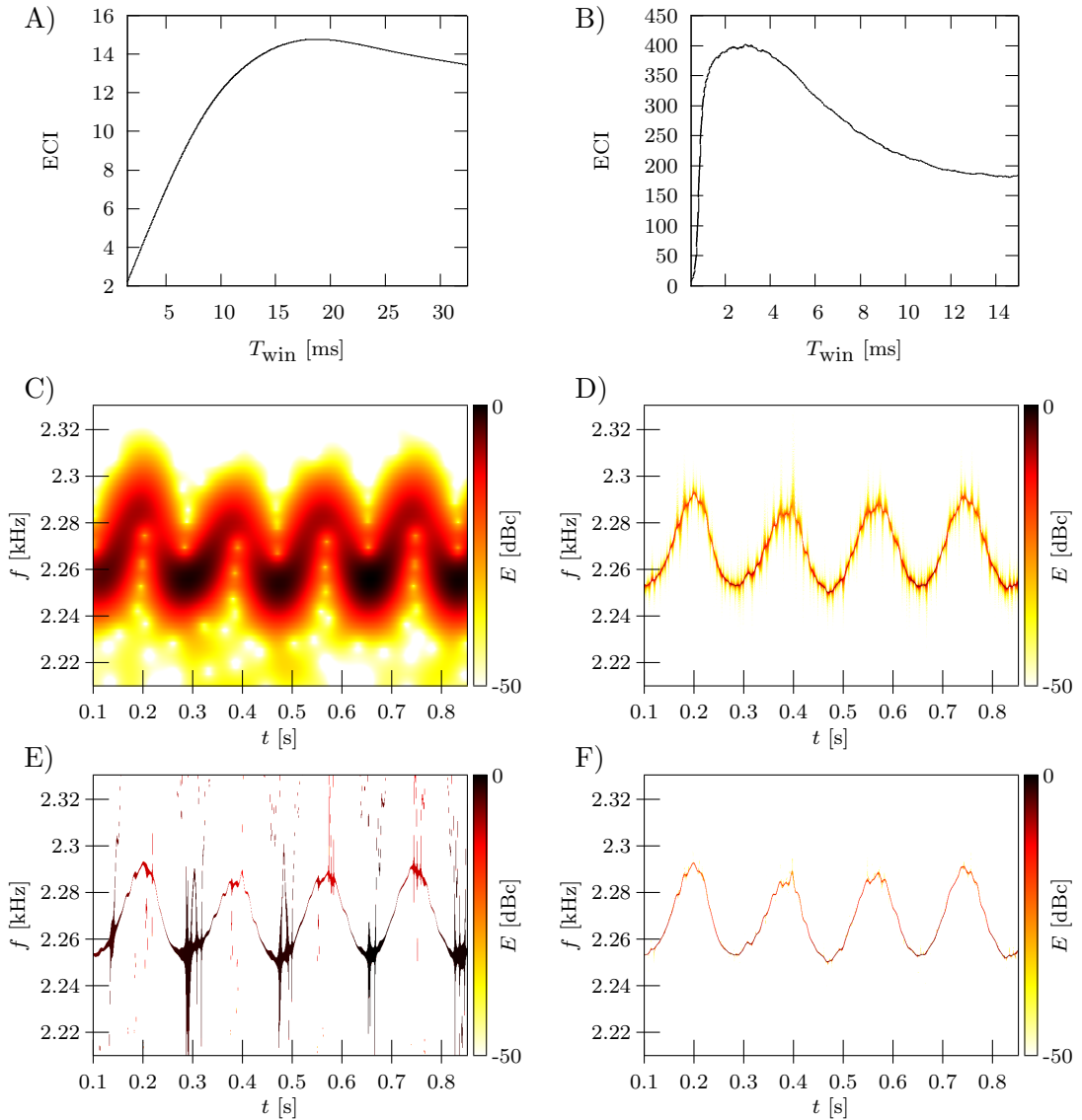




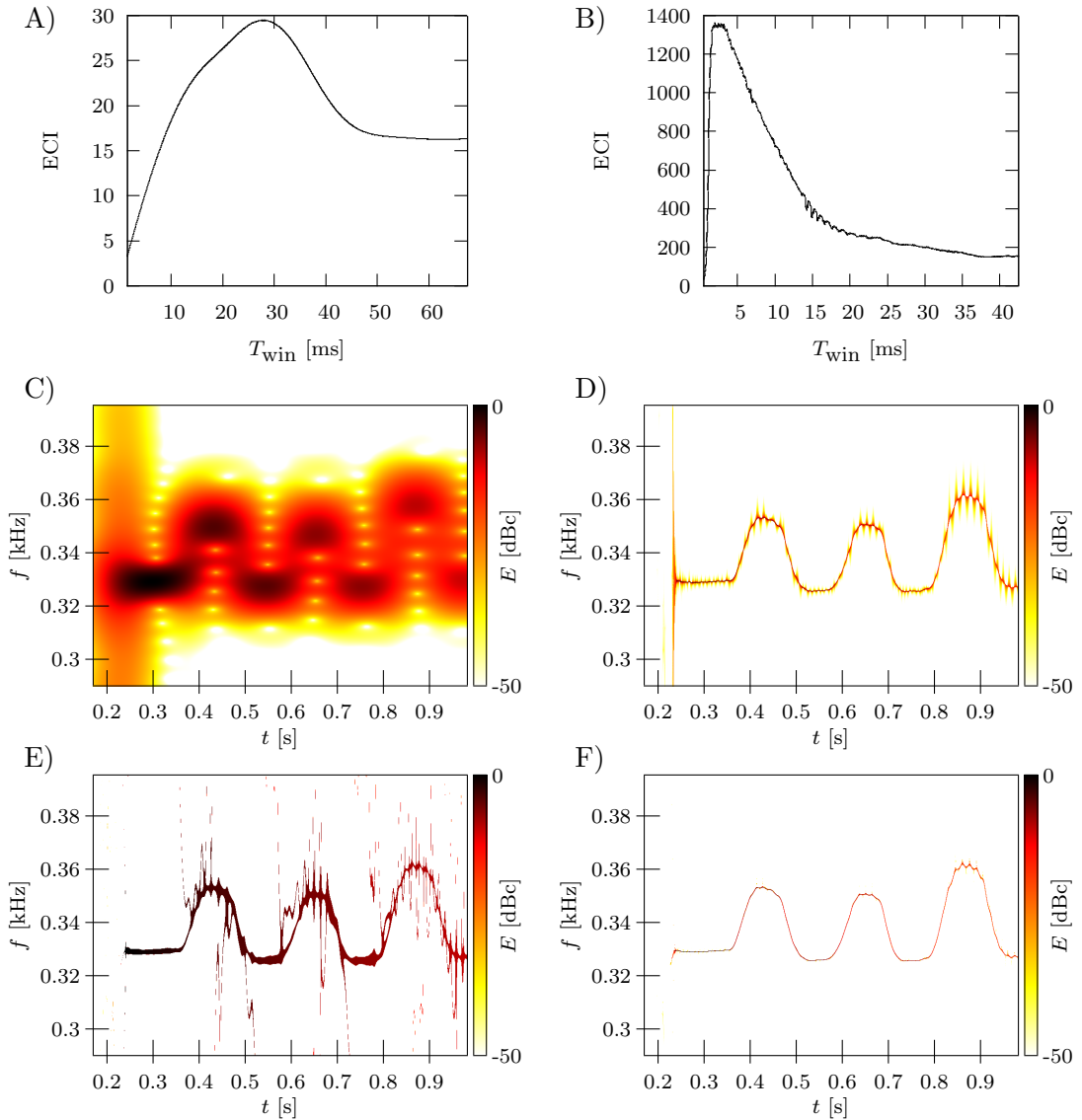
Rysunek 4.23: Spektrogramy klasyczne sygnałów reprezentujących efekt vibrato grany na różnych instrumentach muzycznych: A) na flecie ( $T_{\text{win}} \approx 20.5$  ms), B) na skrzypcach ( $T_{\text{win}} \approx 18.5$  ms) i C) na gitarze ( $T_{\text{win}} \approx 27.5$  ms).



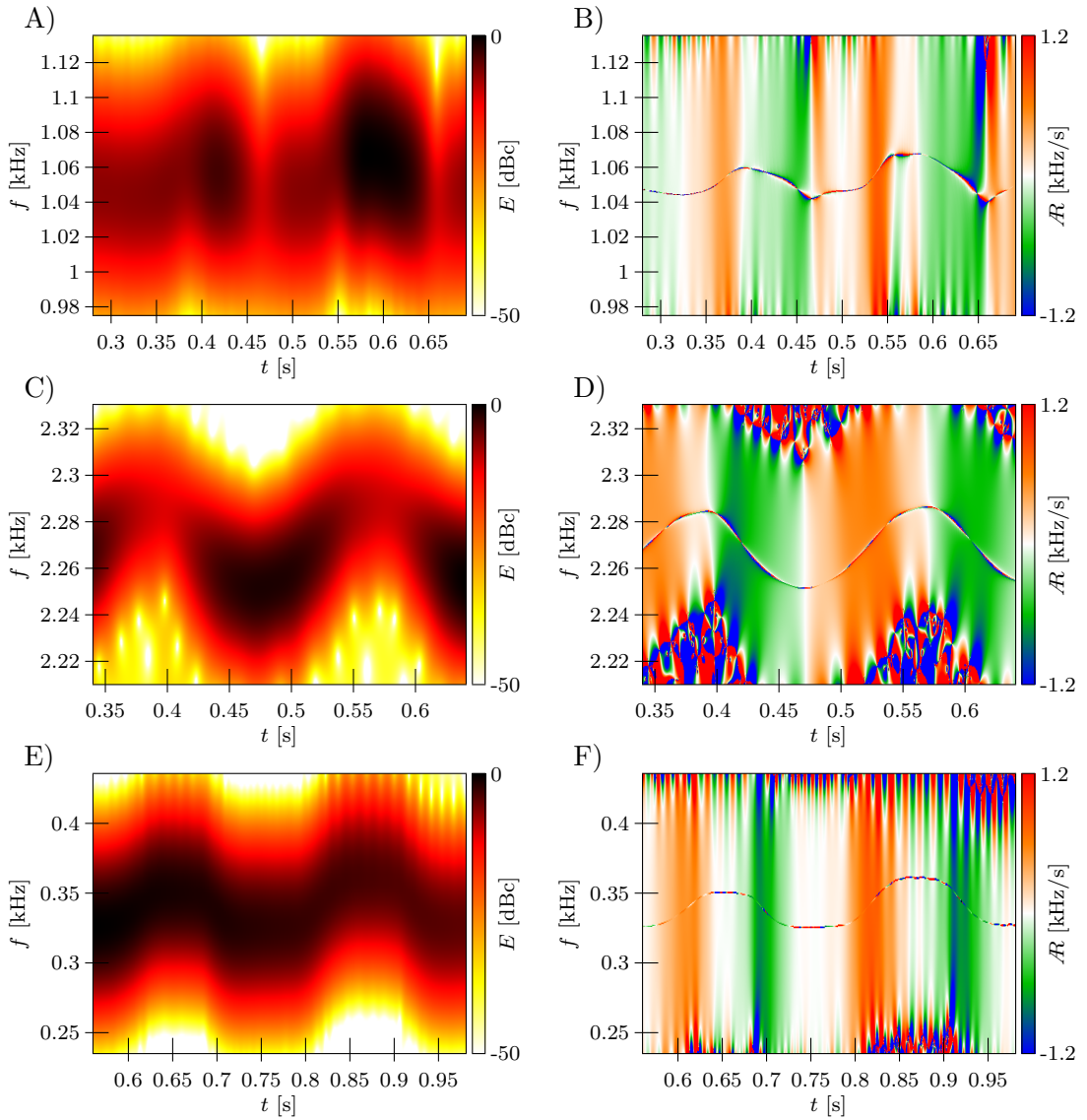
Rysunek 4.24: Analiza dźwięku fletu – efekt wibrato. Charakterystyki parametru ECI w funkcji efektywnej szerokości okna analizującego obliczone dla A) spektrogramu klasycznego i B) spektrogramu skoncentrowanego. Spektrogramy obliczono stosując szerokość okna odpowiadającą najwyższej koncentracji energii: C) klasyczny ( $T_{\text{win}} \approx 20.5$  ms) oraz D) skoncentrowany ( $T_{\text{win}} \approx 1.05$  ms). E) Zmodyfikowany spektrogram klasyczny – przed przemieszczeniem energii ( $T_{\text{win}} \approx 1.05$  ms,  $\alpha_\chi = 0.01$ ) F) atraktogram ( $T_{\text{win}} \approx 1.05$  ms,  $\alpha_\chi = 0.001$ ).



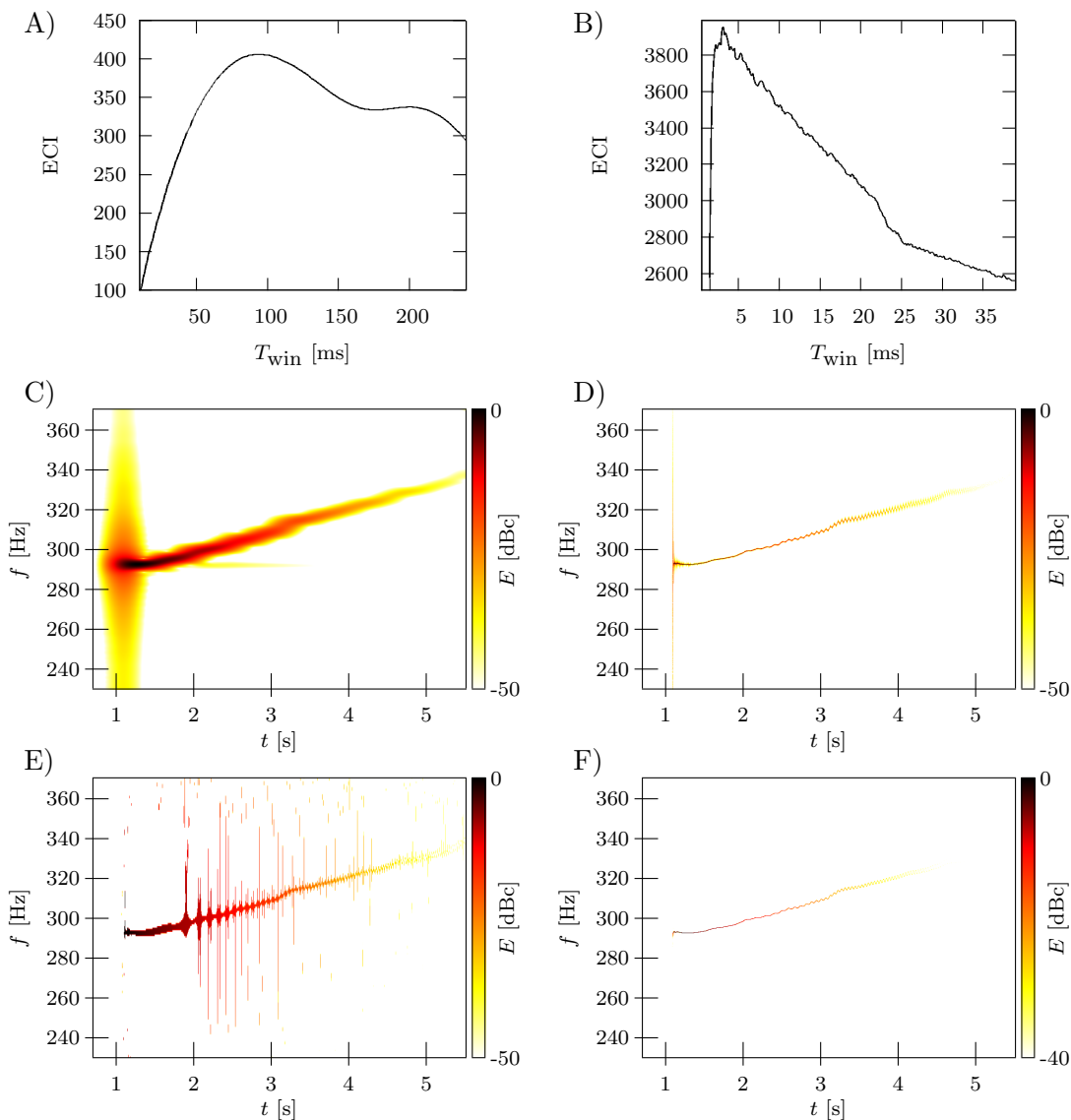
Rysunek 4.25: Analiza dźwięku skrzypiec – efekt wibrato. Charakterystyki parametru ECI w funkcji efektywnej szerokości okna analizującego obliczone dla A) spektrogramu klasycznego i B) spektrogramu skoncentrowanego. Spektrogramy obliczono stosując szerokość okna odpowiadającą najwyższej koncentracji energii: C) klasyczny ( $T_{\text{win}} \approx 18.5$  ms) oraz D) skoncentrowany ( $T_{\text{win}} \approx 2.95$  ms). E) Zmodyfikowany spektrogram klasyczny – przed przemieszczeniem energii ( $T_{\text{win}} \approx 2.95$  ms,  $\alpha_\chi = 0.01$ ) F) atraktogram ( $T_{\text{win}} \approx 2.95$  ms,  $\alpha_\chi = 0.01$ ).



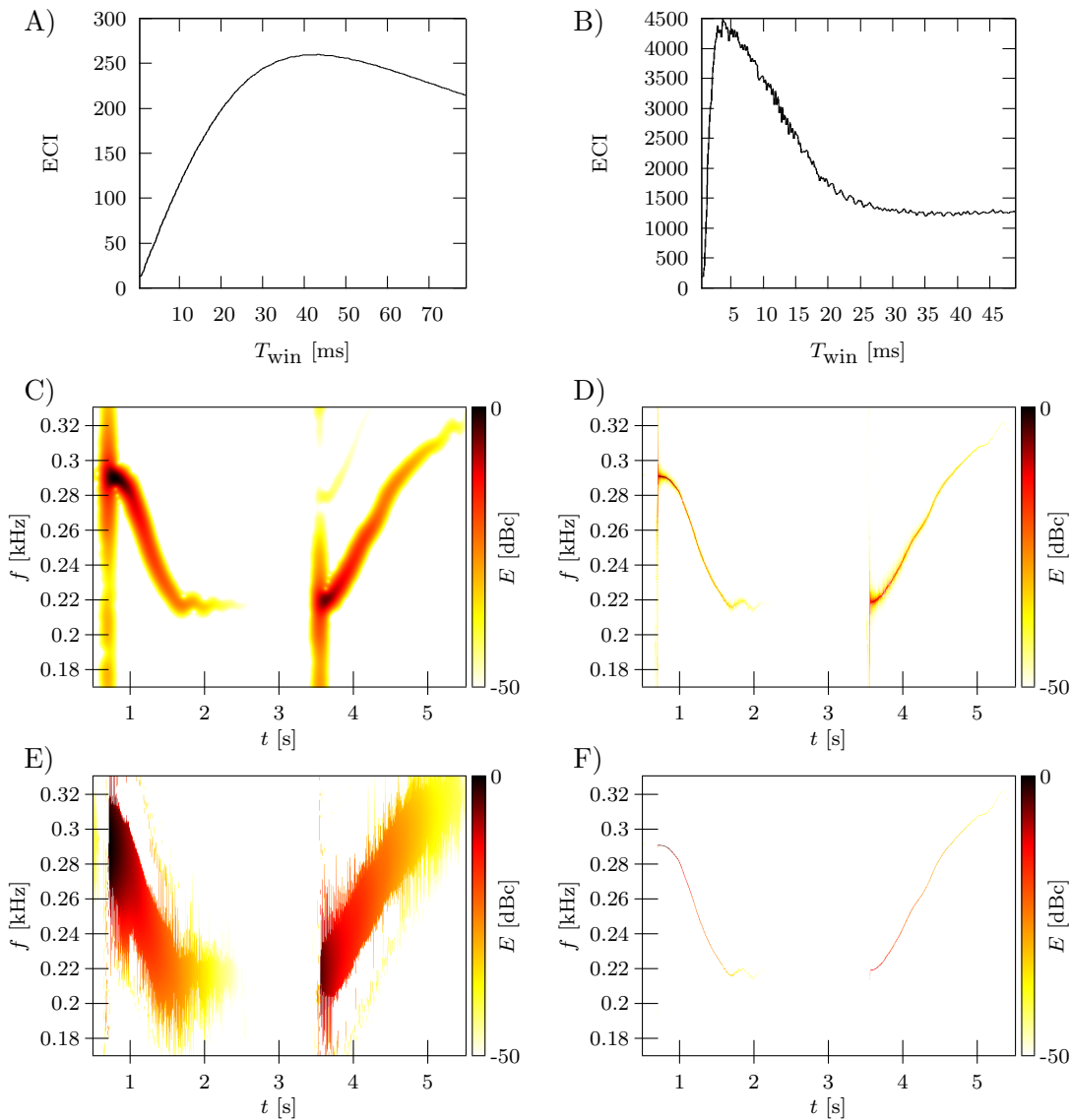
Rysunek 4.26: Analiza dźwięku gitary – efekt vibrato. Charakterystyki parametru ECI w funkcji efektywnej szerokości okna analizującego obliczone dla A) spektrogramu klasycznego i B) spektrogramu skoncentrowanego. Spektrogramy obliczono stosując szerokość okna odpowiadającą najwyższej koncentracji energii: C) klasyczny ( $T_{win} \approx 27.5$  ms) oraz D) skoncentrowany ( $T_{win} \approx 2.5$  ms). E) Zmodyfikowany spektrogram klasyczny – przed przemieszczeniem energii ( $T_{win} \approx 2.5$  ms,  $\alpha_\chi = 0.01$ ) F) atraktogram ( $T_{win} \approx 2.5$  ms,  $\alpha_\chi = 0.01$ ).



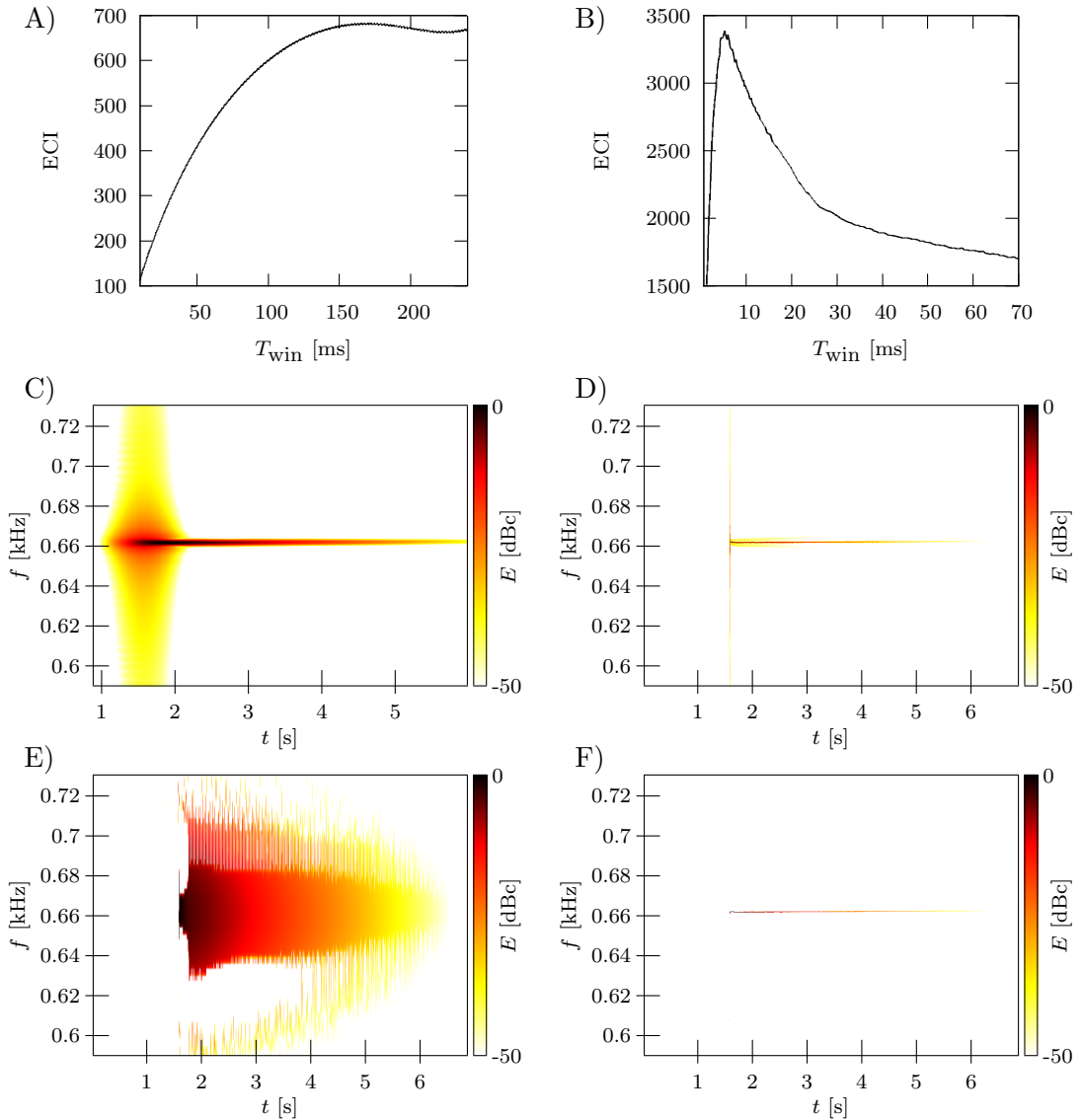
Rysunek 4.27: Zobrazowania efektu vibrato granego na różnych instrumentach muzycznych: AB) na flecie CD) na skrzypcach oraz EF) na gitarze. ACE) Spektrogramy klasyczne i BDF) Akcelerogramy kanałowej fazy chwilowej sygnału zostały obliczone stosując okno Blackmana-Harrisa o efektywnej szerokości równej w przybliżeniu odpowiednio AB)  $T_{\text{win}} \approx 3.3$  ms, CD)  $T_{\text{win}} \approx 6.1$  ms oraz EF)  $T_{\text{win}} \approx 3.5$  ms.



Rysunek 4.28: Analiza dźwięku gitary – efekt podciągnięcia struny (ang. *bending*). Charakterystyki parametru ECI w funkcji efektywnej szerokości okna analizującego obliczone dla A) spektrogramu klasycznego i B) spektrogramu skoncentrowanego. Spektrogramy obliczono stosując szerokość okna odpowiadającą najwyższej koncentracji energii: C) klasyczny ( $T_{win} \approx 95.0$  ms) oraz D) skoncentrowany ( $T_{win} \approx 3.8$  ms). E) Zmodyfikowany spektrogram klasyczny – przed przemieszczeniem energii ( $T_{win} \approx 3.8$  ms,  $\alpha_\chi = 0.01$ ) F) atraktogram ( $T_{win} \approx 3.8$  ms,  $\alpha_\chi = 0.01$ ,  $ECI \approx 4917$ ).

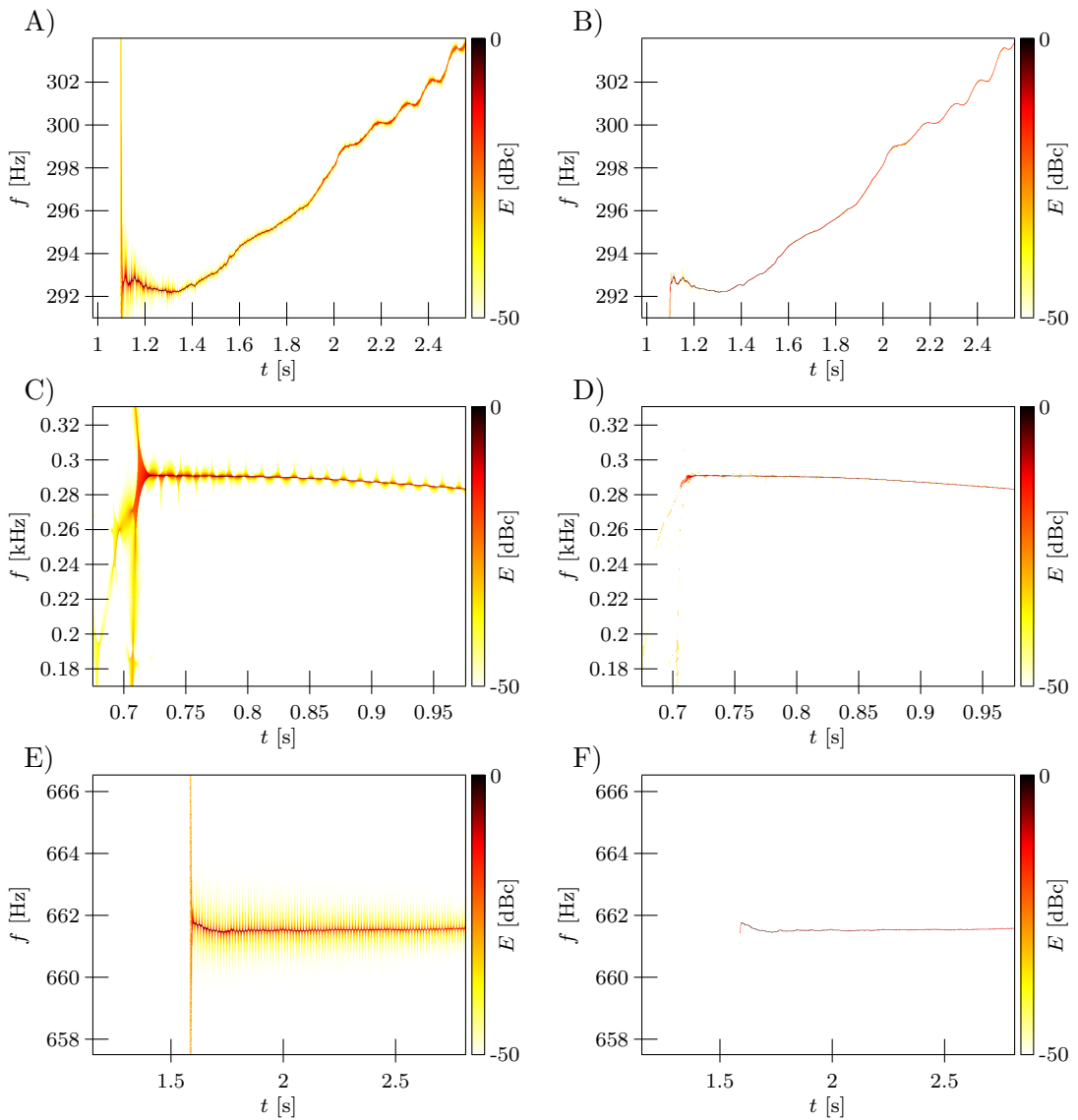


Rysunek 4.29: Analiza dźwięku gitary – efekt przeciągania plastikowej tulejki po strunach wzdłuż gryfu gitary (ang. *slide*). Charakterystyki parametru ECI w funkcji efektywnej szerokości okna analizującego obliczone dla A) spektrogramu klasycznego i B) spektrogramu skoncentrowanego. Spektrogramy obliczono stosując szerokość okna odpowiadającą najwyższej koncentracji energii: C) klasyczny ( $T_{win} \approx 42.0$  ms) oraz D) skoncentrowany ( $T_{win} \approx 4.5$  ms). E) Zmodyfikowany spektrogram klasyczny – przed przemieszczeniem energii ( $T_{win} \approx 4.5$  ms,  $\alpha_\chi = 0.1$ ) F) atraktogram ( $T_{win} \approx 4.5$  ms,  $\alpha_\chi = 0.01$ ,  $ECI \approx 4819$ ).

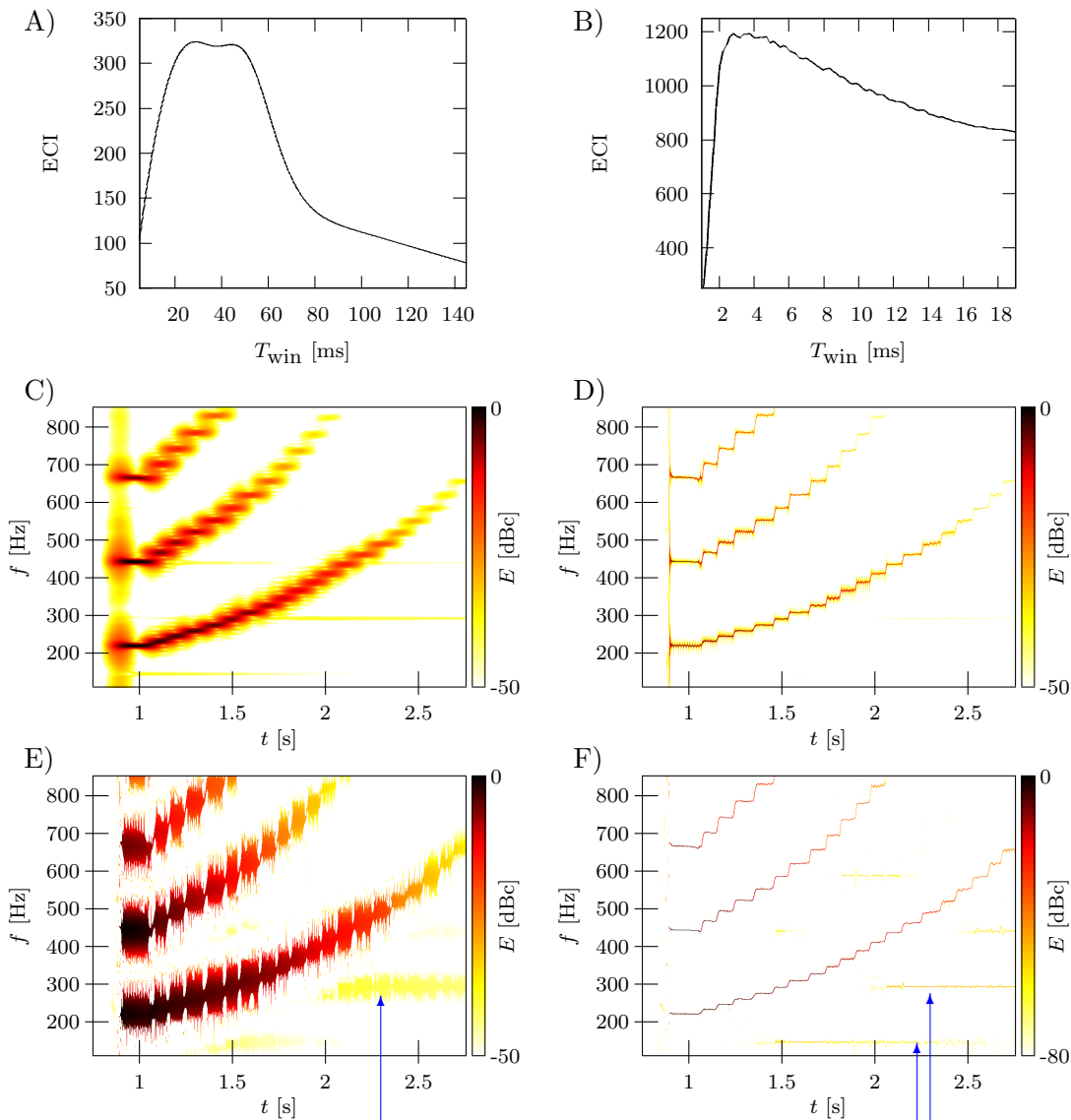


Rysunek 4.30: Analiza dźwięku gitary – flautolet. Charakterystyki parametru ECI w funkcji efektywnej szerokości okna analizującego obliczone dla A) spektrogramu klasycznego i B) spektrogramu skoncentrowanego. Spektrogramy obliczono stosując szerokość okna odpowiadającą najwyższej koncentracji energii: C) klasyczny ( $T_{win} \approx 42.0$  ms) oraz D) skoncentrowany ( $T_{win} \approx 4.5$  ms). E) Zmodyfikowany spektrogram klasyczny – przed przemieszczeniem energii ( $T_{win} \approx 4.5$  ms,  $\alpha_\chi = 0.1$ ) F) atraktogram ( $T_{win} \approx 4.5$  ms,  $\alpha_\chi = 0.01$ ,  $ECI \approx 3740$ ).

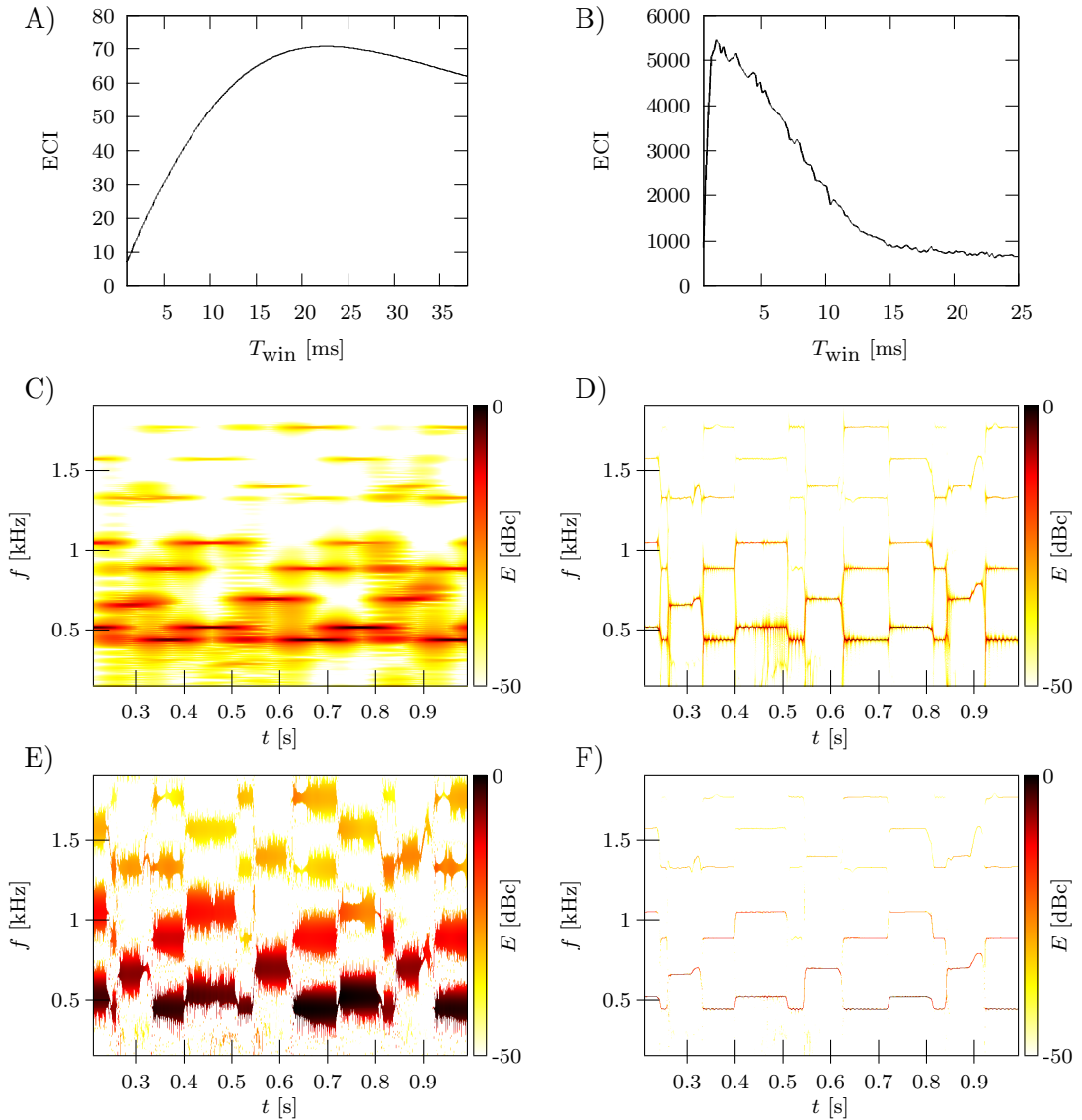




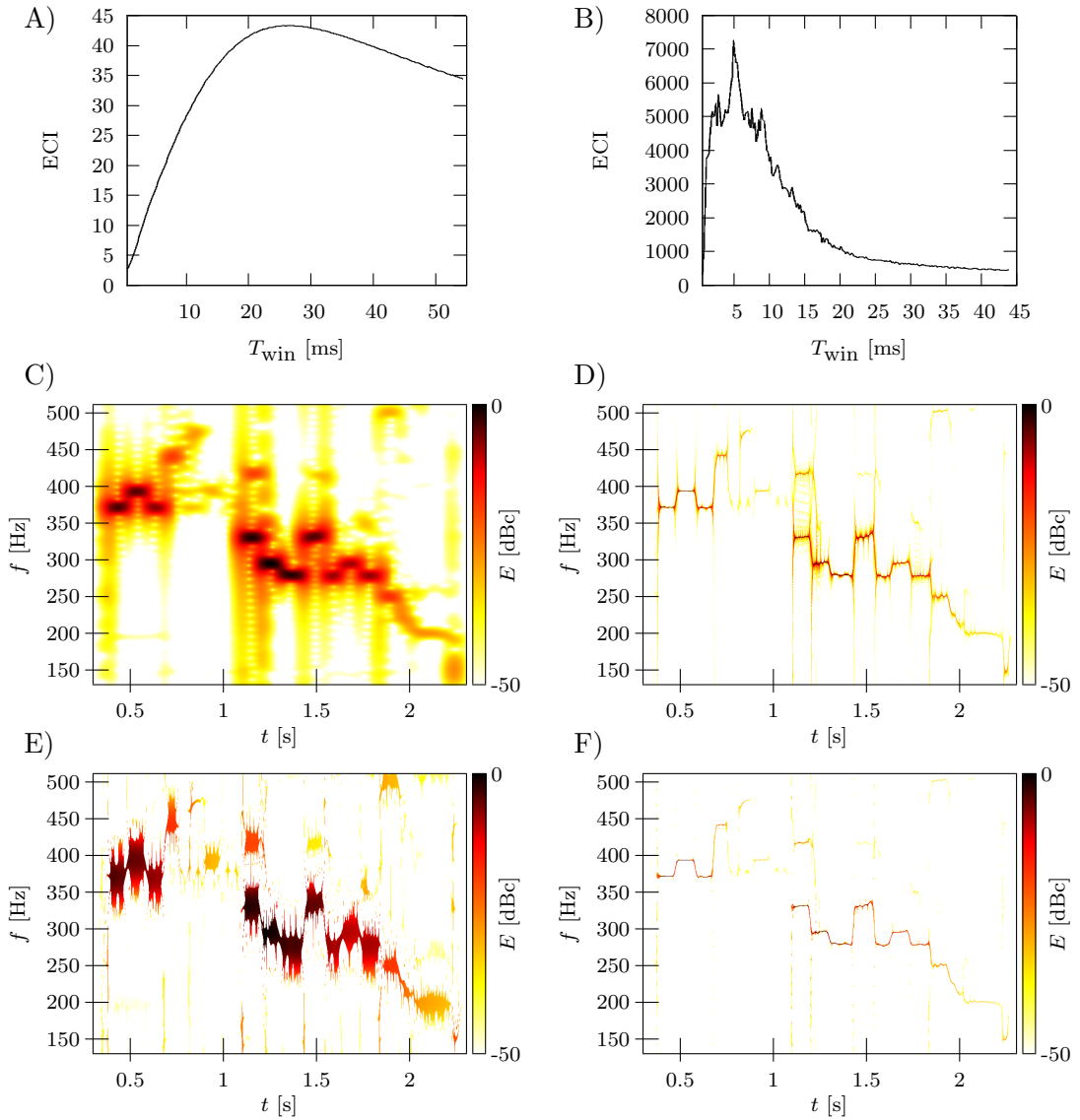
Rysunek 4.31: Analiza dźwięku gitary – powiększenia spektrogramów skoncentrowanych i atraktogramów. Efekt podciągnięcia struny: A) spektrogram skoncentrowany, B) atraktogram. Efekt przeciągnięcia plastikowej tulejki wzdłuż gryfu gitary: C) spektrogram skoncentrowany, D) atraktogram. Flażolet: E) spektrogram skoncentrowany, F) atraktogram.



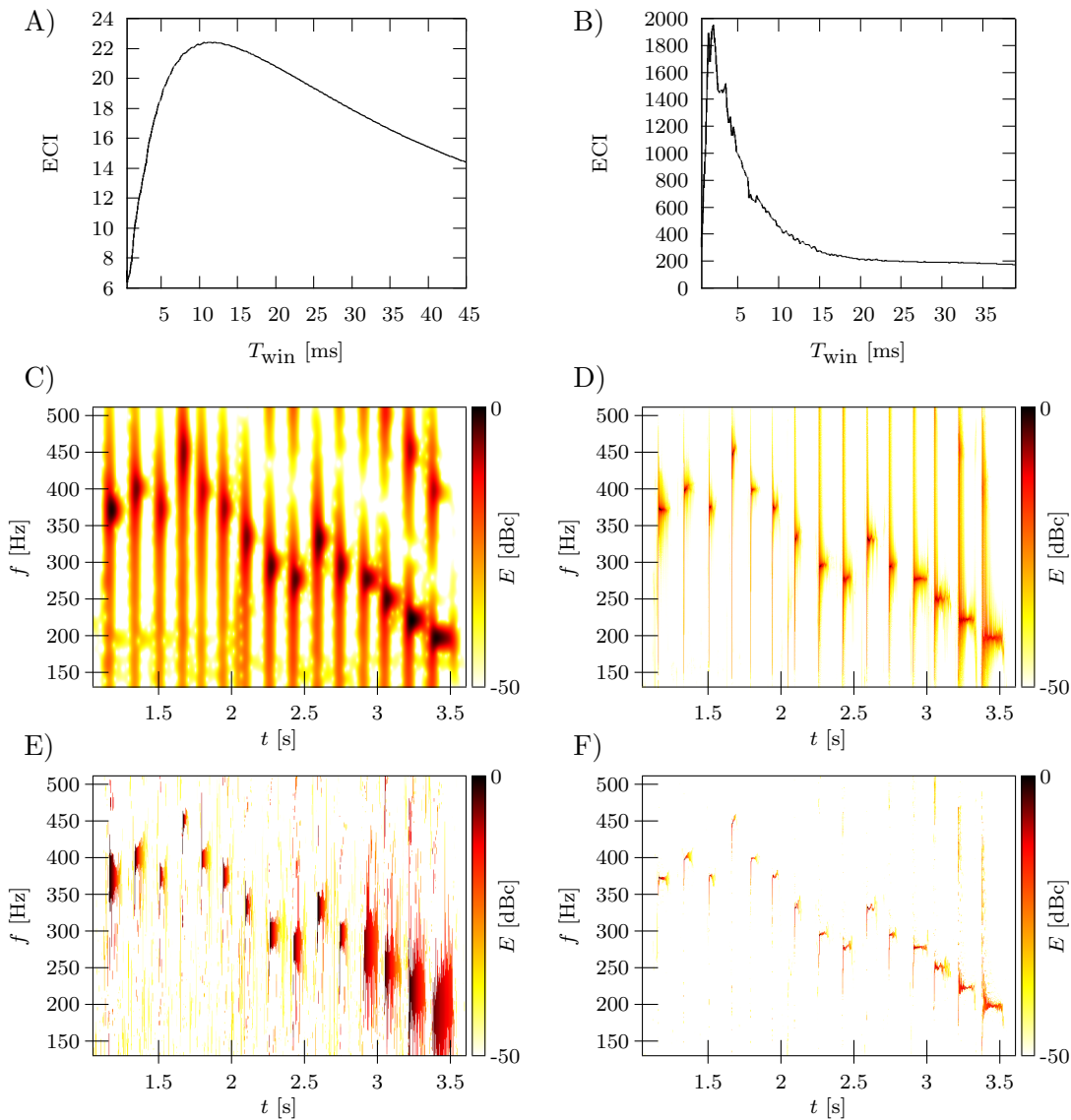
Zachowano informację o bardzo słabym energetycznie komponencie, który prawdopodobnie powstał przez przypadkowe „trącenie” struny D (dostrojonej do ok. 147 Hz). Rysunek 4.32: Analiza dźwięku gitary – glissando. Charakterystyki parametru ECI w funkcji efektywnej szerokości okna analizującego obliczone dla A) spektrogramu klasycznego i B) spektrogramu skoncentrowanego. Spektrogramy obliczono stosując szerokość okna odpowiadającą najwyższej koncentracji energii: C) klasyczny ( $T_{win} \approx 30.0$  ms) oraz D) skoncentrowany ( $T_{win} \approx 2.8$  ms). E) Zmodyfikowany spektrogram klasyczny – przed przemieszczeniem energii ( $T_{win} \approx 2.8$  ms,  $\alpha_\chi = 0.1$ ) F) atraktogram ( $T_{win} \approx 2.8$  ms,  $\alpha_\chi = 0.01$ ,  $ECI \approx 1516$ ).



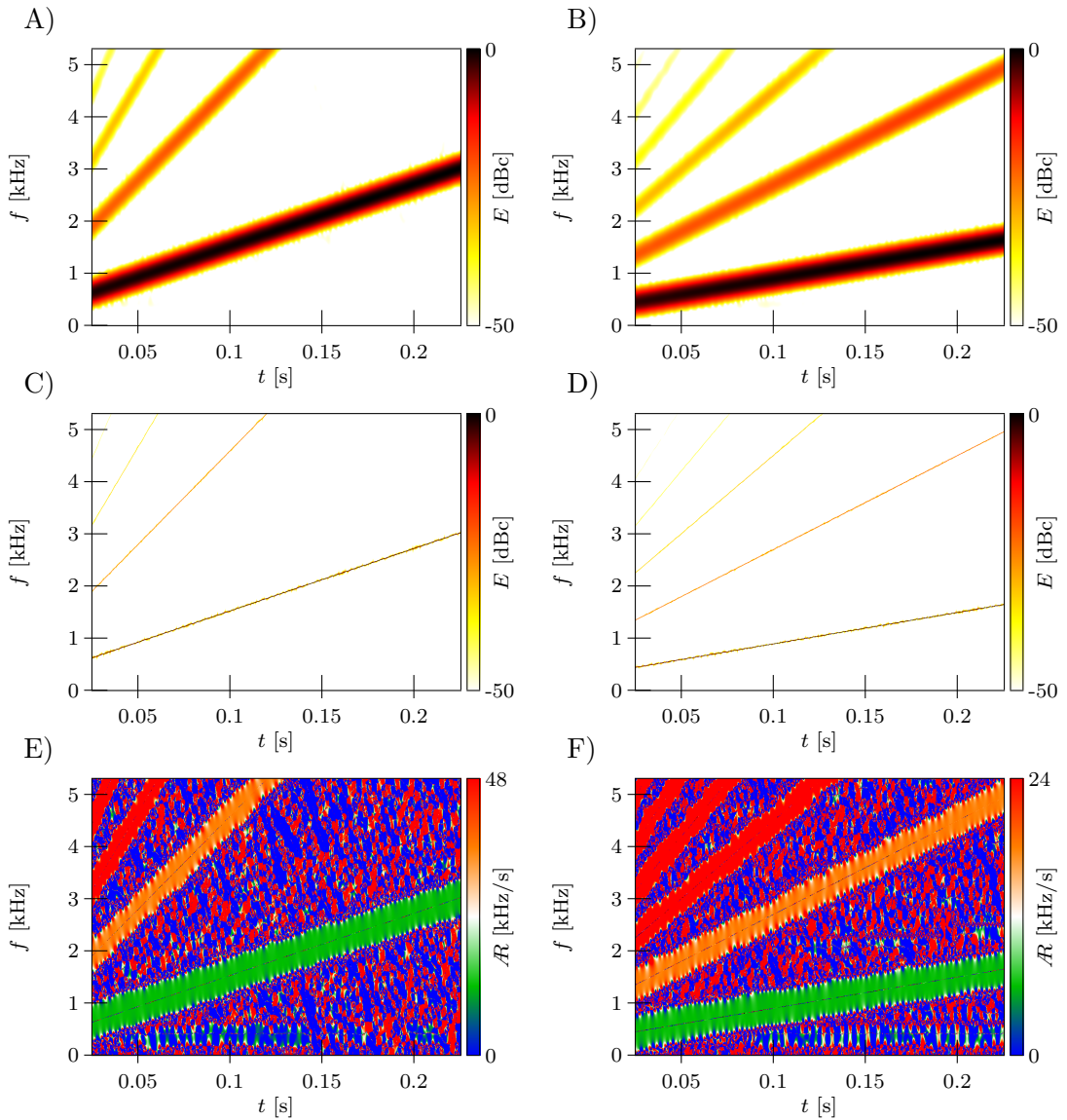
Rysunek 4.33: Analiza dźwięku gitary – szybkie granie krótkich dźwięków (ang. *tapping*). Charakterystyki parametru ECI w funkcji efektywnej szerokości okna analizującego obliczone dla A) spektrogramu klasycznego i B) spektrogramu skoncentrowanego. Spektrogramy obliczono stosując szerokość okna odpowiadającą najwyższej koncentracji energii: C) klasyczny ( $T_{\text{win}} \approx 23.0$  ms) oraz D) skoncentrowany ( $T_{\text{win}} \approx 1.0$  ms). E) Zmodyfikowany spektrogram klasyczny – przed przemieszczeniem energii ( $T_{\text{win}} \approx 1.0$  ms,  $\alpha_\chi = 0.1$ ) F) atraktogram ( $T_{\text{win}} \approx 1.0$  ms,  $\alpha_\chi = 0.01$ ,  $\text{ECI} \approx 5870$ ).



Rysunek 4.34: Analiza dźwięku gitary – technika legato. Charakterystyki parametru ECI w funkcji efektywnej szerokości okna analizującego obliczone dla A) spektrogramu klasycznego i B) spektrogramu skoncentrowanego. Spektrogramy obliczono stosując szerokość okna odpowiadającą najwyższej koncentracji energii: C) klasyczny ( $T_{\text{win}} \approx 26.0$  ms) oraz D) skoncentrowany ( $T_{\text{win}} \approx 5.0$  ms). E) Zmodyfikowany spektrogram klasyczny – przed przemieszczeniem energii ( $T_{\text{win}} \approx 5.0$  ms,  $\alpha_\chi = 0.1$ ) F) atraktogram ( $T_{\text{win}} \approx 5.0$  ms,  $\alpha_\chi = 0.01$ ,  $\text{ECI} \approx 9290$ ).



Rysunek 4.35: Analiza dźwięku gitary – technika staccato. Charakterystyki parametru ECI w funkcji efektywnej szerokości okna analizującego obliczone dla A) spektrogramu klasycznego i B) spektrogramu skoncentrowanego. Spektrogramy obliczono stosując szerokość okna odpowiadającą najwyższej koncentracji energii: C) klasyczny ( $T_{\text{win}} \approx 13.0$  ms) oraz D) skoncentrowany ( $T_{\text{win}} \approx 2.0$  ms). E) Zmodyfikowany spektrogram klasyczny – przed przemieszczeniem energii ( $T_{\text{win}} \approx 2.0$  ms,  $\alpha_\chi = 0.1$ ) F) atraktogram ( $T_{\text{win}} \approx 2.0$  ms,  $\alpha_\chi = 0.01$ ,  $\text{ECI} \approx 6969$ ).



Rysunek 4.36: Analiza impulsu nadawczego sonaru aktywnego o szerokości pasma wynoszącego 3 kHz. Czas trwania impulsu sondującego wyniósł odpowiednio dla obrazowań ACE) 250 ms oraz dla BDF) 0.5 s. Na powyższym zestawieniu ujęto: AB) spektrogramy klasyczne CD) spektrogramy skoncentrowane oraz EF) akcelerogramy kanałowej fazy chwilowej sygnału. Zastosowano okno analizujące Blackmana-Harrisa o efektywnej szerokości równej w przybliżeniu  $T_{\text{win}} \approx 1.0$  ms.

# Podsumowanie

W niniejszej pracy wprowadzono szereg nowych reprezentacji sygnału w dziedzinie czas-częstotliwość, do których można zaliczyć:

- znakowaną kanałową chwilową szerokość pasma (SCIBW),
- kanałową chwilową szerokość pasma (CIBW),
- znakowany lokalny grupowy czas trwania (SLGDR),
- lokalny grupowy czas trwania (LGDR),
- lokalną liczbę stopni swobody (LNDF),
- akcelerogram kanałowej fazy chwilowej sygnału (CICR),
- atraktogram.

Przedstawiono sposób ich obliczania oraz ich interpretacje fizyczne. Ponadto wszystkie zostały bogato zilustrowane na przykładzie sygnałów zarówno wygenerowanych syntetycznie jak i zarejestrowanych w środowisku naturalnym – sygnałów audio akustycznych. Reprezentacje SCIBW, CIBW, CLGDR oraz LGDR zostały ujęte jako części składowe gradientu zespolonej fazy STFT, tzn. jako składowe kanałowej zespolonej pulsacji chwilowej oraz lokalnego zespolonego opóźnienia grupowego.

Szczególną rolę przy dowodzeniu tez niniejszej rozprawy odegrały: atraktogram oraz akcelerogram kanałowej fazy chwilowej sygnału.

Atraktogram stanowi dobrze skoncentrowaną, w okolicach atraktorów, część energii sygnału. Co wizualnie może być postrzegane, jako przeciwdziałanie skutkom zasady nieoznaczoności Heisenberga-Gabora. Należy jednak zauważyć iż, w żadnym punkcie niniejszej rozprawy nie stwierdzono tego kategorycznie. Zaproponowany algorytm stanowi raczej pewien wybieg, w którym część energii spektrogramu jest usuwana. Przy czym zakłada się usunięcie energii z tych fragmentów, w który energia różnych komponentów sygnału została znacząco zmieszana. Dzięki atraktogramowi, można dokładnie przybliżyć prawdziwe położenie komponentów sygnału na płaszczyźnie czas-częstotliwość oraz wyrazić poziom energii sygnału w tych miejscach. Ważną przesłanką dla potwierdzenia użyteczności atraktogramu

jest jego wykorzystanie przy estymacji akcelerogramu kanałowej fazy chwilowej sygnałów modulowanych amplitudowo do, defacto, usunięcia skutków tej modulacji.

Bez wątpienia największym osiągnięciem niniejszej rozprawy jest udana estymacja wartości przyspieszenia faz chwilowych poszczególnych komponentów sygnału na płaszczyźnie czas-częstotliwość, której wynik nazwany jest tutaj akcelerogramem kanałowej fazy chwilowej sygnału. Reprezentacja ta może znaleźć szerokie zastosowanie praktyczne m. in. w radiolokacji (technice radarowej), w diagnostyce ultradźwiękowej, w przetwarzaniu i analizie sygnału mowy – za czym dodatkowo przemawia możliwość estymacji w czasie rzeczywistym. Innym polem, na którym proponowane metody mogłyby być użyteczne jest hydroakustyka, a w szczególności hydrolokacja, gdzie przekształcenie Fouriera jest już od dawna z powodzeniem stosowane, np. w sonarach pasywnych [120] oraz w badaniu właściwości fizycznych podwodnych kanałów propagacyjnych [81]. Ponadto dekompozycja sygnału na składniki impulsowe i *quasi-stacjonarne* otwiera szerokie zastosowania m. in. w oczyszczaniu sygnałów z zakłóceń impulsowych [39] itp.

Omawiany akcelerogram jest dowodem na potrzebę rozpatrywania znakowanych reprezentacji: SCIBW oraz SLGDR. Znak obu tych reprezentacji nie powinien być interpretowany wraz z całą reprezentacją, jako ujemna szerokość pasma sygnału lub ujemny czas trwania sygnału. Znak, w tej sytuacji, wyraża tylko informacje o tym, czy energia sygnału w danym punkcie płaszczyzny czas-częstotliwość przyrasta, czy zanika. Dzięki zachowaniu tej informacji możliwe jest szacowanie wartości, nie tylko przyspieszenia, ale również spowolnienia kanałowej fazy chwilowej sygnału.

Proponowane metody analizy nie wyczerpują całego potencjału leżącego w zastosowaniu gradientu zespolonej fazy STFT w spektrografii. Niniejsza praca może stanowić punkt startowy w dalszym pogłębianiu wiedzy na temat STFT oraz w opracowaniu nowych aplikacji z jej udziałem. Zarówno estymacja akcelerogramu kanałowej fazy chwilowej sygnału jak i atraktogram mogą znaleźć zastosowanie jako etap/etapy przetwarzania w bardziej rozbudowanych metodach analizy sygnału. Obiecująca wydaje się tu synteza STFT oraz CICR wraz z linearną transformacją Hougha w celu detekcji sygnałów świergotowych o liniowo modulowanej częstotliwości. Dodatkowo badania należy uzupełnić o zastosowanie transformacji świergotowych (ang. *chirplet*) oraz adaptacyjny dobór okna analizującego.



# Bibliografia

- [1] F. Auger. *Representations temps-frequence des signaux non-stationnaires: synthese et contributions*. Praca doktorska, Ecole Centrale de Nantes, France, 1991.
- [2] F. Auger, E. Chassande-Mottin, P. Flandrin. Making reassignment adjustable: The levenberg-marquardt approach. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP'12*, strony 3889–3892, 2012.
- [3] F. Auger, E. Chassande-Mottin, P. Flandrin. On phase-magnitude relationships in the short-time fourier transform. *IEEE Signal Processing Letters*, 19:267–270, 2012.
- [4] F. Auger, P. Flandrin. Generalization of the reassignment method to all bilinear time-frequency and time-scale representations. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP-94.*, strony 317–320, 1994.
- [5] F. Auger, P. Flandrin. The why and how of time-frequency reassignment. *Proceedings of the IEEE-SP International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, strony 197–200, 1994.
- [6] F. Auger, P. Flandrin. Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by the reassignment method. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(5):1068–1089, 1995.
- [7] F. Auger, P. Flandrin, P. Goncalves, O. Lemoine. *Time-Frequency Toolbox For Use with MATLAB*. CNRS (France) and Rice University (USA), 1996.
- [8] L. Auslander, R. Tolimieri. Characterizing the radar ambiguity functions. *IEEE Transactions on Information Theory*, 30(6):832–836, 1984.
- [9] J. Baptiste, J. Fourier. *The Analytical Theory of Heat*. The University Press, 1878.
- [10] A. E. Barnes. The calculation of instantaneous frequency and instantaneous bandwidth. *Geophysics*, 57(11):1520–1524, 1992.

- [11] A. E. Barnes. Instantaneous spectral bandwidth and dominant frequency with applications to seismic reflection data. *Geophysics*, 58(3):419–428, 1993.
- [12] B. Czarny, R. Rapacki. *Podstawy Ekonomii*. PWN Warszawa, 2002.
- [13] A. V. Bitsadze. Boundary value problems of analytic function theory. M. Hazewinkel, redaktor, *Encyclopedia of Mathematics*. Springer, 2001.
- [14] M. Blok, M. Rojewski. O poprawianiu dokładności periodogramu - estymaty widma gęstości mocy stacjonarnego procesu stochastycznego. *Biuletyn Wojskowej Akademii Technicznej*, 59(4):55–69, 2010.
- [15] B. Boashash. Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal. i. fundamentals. *Proceedings of the IEEE*, wolumen 80, strony 520–538, 1992.
- [16] B. Boashash. Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal. ii. algorithms and applications. *Proceedings of the IEEE*, wolumen 80, strony 540–568, 1992.
- [17] B. Boashash. *Time-Frequency Signal Analysis and Processing - A Comprehensive Reference*. Elsevier Science, Oxford, 2003.
- [18] F.J. Charpentier. Pitch detection using the short-term phase spectrum. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP-86.*, strony 113–116, 1986.
- [19] E. Chassande-Mottin, F. Auger, P. Flandrin. Supervised time-frequency reassignment. *Proceedings of the IEEE-SP International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, strony 517–520, 1996.
- [20] E. Chassande-Mottin, F. Auger, P. Flandrin. Estimating singularities with reassigned distributions. *Proceedings of 5th International Conference on Signal Processing, (WCCC-ICSP 2000)*, strony 362–365, 2000.
- [21] E. Chassande-Mottin, F. Auger, P. Flandrin. Time-frequency/time-scale reassignment. L. Debnath, redaktor, *Wavelets and Signal Processing*, strony 233–267. Birkhauser Boston, 2003.
- [22] E. Chassande-Mottin, F. Auger, P. Flandrin. Reassignment. F. Hlawatsch, F. Auger, redaktorzy, *Time-Frequency Analysis: Concepts and Methods*, strony 249–277. ISTE Ltd and John Wiley & Sons, Inc., 2008.
- [23] E. Chassande-Mottin, I. Daubechies, F. Auger, P. Flandrin. Differential reassignment. *IEEE Signal Processing Letters*, 4(10):293–294, 1997.

- [24] E. Chassande-Mottin, P. Flandrin. On the time-frequency detection of chirps. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 6(2):252–281, 1999.
- [25] E. Chassande-Mottin, P. Flandrin, F. Auger. On the statistics of spectrogram reassignment vectors. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 9:355–362, 1998.
- [26] L. Cohen. Time-frequency distributions - a review. *Proceedings of the IEEE*, wolumen 77, strony 941–980, 1989.
- [27] L. Cohen. Distributions concentrated along the instantaneous frequency. *Proceedings of Advanced Signal Processing Algorithms, Architectures, and Implementations*, strony 149–157, 1990.
- [28] L. Cohen. *Time-Frequency Analysis: Theory and Applications*. Prentice Hall, 1994.
- [29] L. Cohen, C. Lee. Instantaneous frequency and time-frequency distributions. *Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, wolumen 2, strony 1231 – 1234, 1989.
- [30] L. Cohen, C. Lee. Instantaneous bandwidth for signals and spectrogram. *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP '90*, strony 2451–2454, 1990.
- [31] L. Cohen, P. Loughlin, D. E. Vakman. On an ambiguity in the definition of the amplitude and phase of a signal. *Signal Processing*, 79:301–307, 1999.
- [32] K. Czarnecki. A novel method of time-frequency analysis: an essential spectrogram. *Hydroacoustics*, 16:29–34, 2013.
- [33] K. Czarnecki, M. Moszyński. Using concentrated spectrogram for analysis of audio acoustic signal. *Hydroacoustics*, 15:27–32, 2012.
- [34] K. Czarnecki, M. Moszyński. A novel method of local chirp-rate estimation of lfm chirp signals in the time-frequency domain. *Proceedings of 36th International Conference on Telecommunications and Signal Processing*, Rzym, 2013.
- [35] K. Czarnecki, M. Moszyński, M. Rojewski. A novel approach to sonar images focussing evaluation. *Proceedings of IEEE OCEANS - Spain*, Santander, Hiszpania, 2011.
- [36] K. Czarnecki, M. Moszyński, M. Rojewski. Concentrated spectrogram of audio acoustic signals - a comparative study. *Proceedings of Acoustics 2012*, Nantes, Francja, 2012.

- [37] K. Czarnecki, M. Moszyński, M. Rojewski. An objective focussing measure for acoustically obtained images. A. Nowicki, J. Litniewski, T. Kujawska, redaktorzy, *Acoustical Imaging*, wolumen 31, strony 447–454. Springer Netherlands, 2012.
- [38] K. Czarnecki, S. Możdżonek. Modulacja fmt: Właściwości oraz efektywna realizacja modulatora z wykorzystaniem algorytmu overlap-add. *Zeszyty Naukowe Wydziału, Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki Politechniki Gdańskiej*, 19(8), 2010.
- [39] A. Czyżewski. Some methods for detection and interpolation of impulsive distortions in old audio recordings. *Proceedings of IEEE ASSP Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics*, strony 139 – 142, 1995.
- [40] A. Dobrogowski. *Sygnal Czasu*. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, 2003.
- [41] A. W. Doerry. *Generating Nonlinear FM Chirp Waveforms for Radar*. Sandia National Laboratories, 2006.
- [42] P. Druka. *Pomiędzy czasem a częstotliwością, Reprezentacje przybliżone*. Opublikowane w internecie, 2004.
- [43] D. Tkaczuk E. Hermanowicz, M. Rojewski. Modyfikacja wysokości brzmienia dźwięku świergotowego na podstawie jego zespolonej reprezentacji dynamicznej. *Materiały konferencyjne z Krajowego Sympozjum Telekomunikacji i Teleinformatyki*, 2006.
- [44] H. G. Feichtinger, T. Stohmer. *Advances in Gabor Analysis*. Birkhauser Boston, 2003.
- [45] K. R. Fitz, L. Haken. On the use of time: Frequency reassignment in additive sound modeling. *Journal of the Audio Engineering Society*, 50(11):879–893, 2002.
- [46] K. R. Fitz, L. Haken, P. Christensen. Transient preservation under transformation in an additive sound model. *Proceedings of the International Computer Music Conference*, strony 392–395, Berlin, Niemcy, 2000.
- [47] P. Flandrin. Ambiguity functions. B. Boashash, redaktor, *Time-Frequency Signal Analysis and Processing - A Comprehensive Reference*, strony 160–167. Elsevier Science, Oxford, 2003.
- [48] P. Flandrin, F. Auger, E. Chassande-Mottin. Time-frequency reassignment: From principles to algorithms. A. Papandreou-Suppappola, redaktor, *Applications in Time-Frequency Signal Processing*, strony 179–203. CRC Press, Boca Raton, 2003.

- [49] D. Friedman. Instantaneous-frequency distribution vs. time: An interpretation of the phase structure of speech. *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP '85*, wolumen 10, strony 1121–1124, 1985.
- [50] S. A. Fulop. Phonetic applications of the time-corrected instantaneous frequency spectrogram. *Phonetica*, 64(4):237–262, 2007.
- [51] S. A. Fulop. Accuracy of formant measurement for synthesized vowels using the reassigned spectrogram and comparison with linear prediction. *Journal of the Acoustical Society of America*, 127(4):2114–2117, 2010.
- [52] S. A. Fulop. The fourier power spectrum and spectrogram. *Speech Spectrum Analysis, Signals and Communication Technology*, strony 69–106. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [53] S. A. Fulop. The reassigned spectrogram. *Speech Spectrum Analysis, Signals and Communication Technology*, strony 127–165. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [54] S. A. Fulop, K. R. Fitz. A unified theory of time-frequency reassignment. *Digital Signal Processing*, in review, 2005.
- [55] S. A. Fulop, K. R. Fitz. Algorithms for computing the time-corrected instantaneous frequency (reassigned) spectrogram, with applications. *Journal of the Acoustical Society of America*, 119(1):360–371, 2006.
- [56] S. A. Fulop, K. R. Fitz. A spectrogram for the twenty-first century. *Acoustics Today*, 2(3):26–33, 2006.
- [57] S. A. Fulop, K. R. Fitz. Using the reassigned spectrogram to obtain a voiceprint. *Journal of the Acoustical Society of America*, 119(5):3337–3337, 2006.
- [58] S. A. Fulop, K. R. Fitz. Separation of components from impulses in reassigned spectrograms. *Journal of the Acoustical Society of America*, 121(3):1510–1518, 2007.
- [59] D. Gabor. Theory of communication. *Journal of the Institution of Electrical Engineers*, 93(26):429–457, 1946.
- [60] K. L. Gaston, D. J. Nelson. Exploiting local stft properties. *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP '00*, strony 97–100, 2000.
- [61] G. Girolami, D. E. Vakman. Instantaneous frequency estimation and measurement: a quasi-local method. *Measurement Science and Technology*, 13(6):1002–1016, 2002.

- [62] K. Grochenig. Uncertainty principles for time-frequency representations. H. G. Feichtinger, T. Stohmer, redaktorzy, *Advances in Gabor Analysis*, strony 11–28. Birkhauser Boston, 2003.
- [63] S. L. Hahn. The instantaneous complex frequency concept and its application to the analysis of building-up of oscillations in oscillators. *Proceedings of Vibration Problems*, wolumen 1, strony 24–46, 1959.
- [64] S. L. Hahn. Complex variable frequency electric circuit theory. *Proceedings of the IEEE*, wolumen 52, 1964.
- [65] S. L. Hahn. *Teoria modulacji i detekcji*. Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, 1981.
- [66] S. L. Hahn. *Hilbert transforms in signal processing*. Artech House, 1996.
- [67] S. L. Hahn. The instantaneous complex frequency of the sum of two harmonic signals. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences*, 48(4):607–609, 2000.
- [68] S. W. Hainsworth, M. D. Macleod. *Time Frequency Reassignment: A Review and Analysis*. Cambridge University Engineering Department, 2003.
- [69] F. Harris. *Multirate Signal Processing for Communication Systems*. Prentice Hall, 2004.
- [70] E. Hermanowicz, M. Papaj. Reprezentacje dynamiczne podpisu odrębnego. *Zeszyty Naukowe Wydziału Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki Politechniki Gdańskiej*, 14:723–730, 2007.
- [71] E. Hermanowicz, M. Papaj. Identity verification using complex representations of handwritten signature. *Zeszyty Naukowe Wydziału Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki Politechniki Gdańskiej*, 18(8):127–132, 2010.
- [72] E. Hermanowicz, M. Rojewski, C. Zawidzki. Estymator wysokości chwilowej dźwięku w oparciu o jego zespoloną pulsację chwilową. *Elektronika-Konstrukcje, technologie, zastosowania*, 1(9):155–157, 2011.
- [73] D. Hilbert. *Grundzüge einer allgemeinen theorie der linearen integralgleichungen*. Leipzig, B. G. Teubner, 1912.
- [74] J. Izydorczyk, G. Płonka, G. Tyma. *Teoria Sygnałów*. Wydawnictwo Helion, 1999.
- [75] G. Jones, B. Boashash. Instantaneous frequency, instantaneous bandwidth and the analysis of multicomponent signals. *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP '90*, strony 2467–2450, 1990.

- [76] G. Jourdain, J. P. Henrioux. Use of large bandwidth-duration binary phase shift keying signals in target delay doppler measurements. *Journal of the Acoustical Society of America*, 90(1):299–309, 1991.
- [77] M. Kaniewska. On the use of instantaneous complex frequency for analysis and modification of simple sounds. *Proceedings of Research in Microelectronics and Electronics*, Cork, Irlandia, 2009.
- [78] M. Kaniewska. Human voice modification using instantaneous complex frequency. *Proceedings of 128th AES Convention*, Londyn, Wielka Brytania, 2010.
- [79] M. Kaniewska. Online pitch estimation using instantaneous complex frequency. *Proceedings of 20th European Conference on Circuit Theory and Design*, 2011.
- [80] M. Kaniewska. *Zespolona pulsacja chwilowa w analizie i konwersji głosu*. Praca doktorska, Politechnika Gdańska; Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki, 2012.
- [81] I. Kochańska, H. Lasota. Measurements of transmission properties of acoustic communication channels. *Hydroacoustics*, 15:91 – 98, 2012.
- [82] K. Kodera, R. Gendrin, C. D. Villedary. Analysis of time-varying signals with small bt values. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 26(1):64–76, 1978.
- [83] K. Kodera, C. D. Villedary, R. Gendrin. A new method for the numerical analysis of non-stationary signals. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 12(2-3):142–150, 1976.
- [84] M. Kulczycki. *Bezrastrowy spektrograf*. Praca magisterska, Politechnika Gdańska; Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki, 2010.
- [85] D. A. Linden. A note concerning instantaneous frequency. *Proceedings of the IRE*, 46:1970–1970, 1958.
- [86] W. H. Louisell. Amplitude and phase uncertainty relations. *Physics Letters*, 7(1):60–61, 1963.
- [87] F. Millioz, N. Martin. Detection of the boundaries of time-frequency patterns with a reassignment-based method. *Proceedings of 7th IMA Conference, Cirencester*, 2006.
- [88] F. Millioz, N. Martin. Reassignment vector field for time-frequency segmentation. *Proceedings of 14th International Congress on Sound and Vibration, Australia*, 2007.

- [89] D. Nelson, G. Cristóbal, V. Kober, F. Cakrak, P. Loughlin, L. Cohen. Denoising using time-frequency and image processing methods. *Proceedings of Advanced Signal Processing Algorithms, Architectures, and Implementations IX*, 1999.
- [90] D. J. Nelson. Special purpose correlation functions for improved signal detection and parameter estimation. *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP '93*, strony 73–76, 1993.
- [91] D. J. Nelson. Estimation of fm modulation of multi-component signals from the fourier phase. *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP '98*, wolumen 6, strony 3421 – 3424, 1998.
- [92] D. J. Nelson. Invertible time-frequency surfaces. *Proceedings of the IEEE-SP International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, strony 13–16, 1998.
- [93] D. J. Nelson. Cross-spectral methods for processing biological signals. *Proceedings of the Tenth IEEE Workshop on Statistical Signal and Array Processing*, strony 400–404, 2000.
- [94] D. J. Nelson. Cross-spectral methods for processing speech. *Journal of the Acoustical Society of America*, 110(5):2575–2592, 2001.
- [95] D. J. Nelson. Applications of surface correlation to the estimation of the harmonic fundamental of speech. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, 2002(1):80–86, 2002.
- [96] D. J. Nelson. Instantaneous higher order phase derivatives. *Digital Signal Processing*, 12:416–428, 2002.
- [97] D. J. Nelson. Cross-spectral based formant estimation and alignment. *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP '04*, strony 621–624, 2004.
- [98] D. J. Nelson. Signal reconstruction from concentrated stft peaks [short time fourier transform peaks]. *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP '05*, strony 129–132, 2005.
- [99] D. J. Nelson, O. P. Kenny. Invertible time-frequency representations. *Proceedings of Advanced Signal Processing Algorithms, Architectures, and Implementations VIII*, 1998.



- [100] D. J. Nelson, P. Loughlin, G. Cristobal, L. Cohen. Time-frequency methods for biological signal estimation. *Proceedings of 15th International Conference on Pattern Recognition*, strony 110–114, 2000.
- [101] D. J. Nelson, K. M. Short. A channelized cross spectral method for improved frequency resolution. *Proceedings of the IEEE-SP International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, strony 101–104, 1998.
- [102] D. J. Nelson, D. C. Smith. A new linear time-frequency paradigm. *Proceedings of Signal and Image Processing*, 2004.
- [103] D. J. Nelson, D. C. Smith. Adaptive interference removal based on concentration of the stft. *Digital Signal Processing*, 5(16):597–606, 2006.
- [104] D. J. Nelson, D. C. Smith. A linear model for tf distribution of signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(9):3435–3447, 2006.
- [105] D. J. Nelson, D. C. Smith, R. C. Masenten. Linear distribution of signals. *Proceedings of Advanced Signal Processing Algorithms, Architectures, and Implementations XIV*, 2004.
- [106] D. J. Nelson, W. G. Wysocki. Cross-spectral methods with an application to speech processing. *Proceedings of Advanced Signal Processing Algorithms, Architectures, and Implementations IX*, 1999.
- [107] G. K. Nilsen. Recursive time-frequency reassignment. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 57(8):3283–3287, 2009.
- [108] J. C. O’Neill, P. Flandrin. Chirp hunting. *Proceedings of the IEEE-SP International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, strony 425 – 428, 1998.
- [109] A. V. Oppenheim, J. S. Lim. The importance of phase in signals. *Proceedings of the IEEE*, wolumen 69, strony 529 – 541, 1981.
- [110] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer, J. R. Buck. *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice Hall, 1999.
- [111] M. Papaj. *Blokowe algorytmy interpolacji trajektorii zespolonych i oceny ich podobieństwa, z zastosowaniem do weryfikacji dynamicznego podpisu odręcznego*. Praca doktorska, Politechnika Gdańska; Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki, 2009.
- [112] B. Picinbono. On instantaneous amplitude and phase of signals. *IEEE Transaction on Signal Processing*, 45(3):552 – 560, 1997.

- [113] F. Plante, G. Meyer, W. A. Ainsworth. Improvement of speech spectrogram accuracy by the method of reassignment. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, 6(3):282–287, 1998.
- [114] A. Potamianos, P. Maragos. Speech formant frequency and bandwidth tracking using multiband energy demodulation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 99:3795 – 3806, 1996.
- [115] J. Proakis, D. Manolakis. *Digital Signal Processing*. Prentice Hall, 2006.
- [116] A. Przybyszewski, T. Rutkowski. Processing of the incomplete representation of the visual world. *Proceedings of the First Warsaw International Seminar on Intelligent Systems*, 2004.
- [117] K. N. Reddy, S. N. Reddy, A.S.R. Reddy. Significance of complex group delay functions in spectrum estimation. *Signal & Image Processing: An International Journal*, 2(1):114–133, 2011.
- [118] A. W. Rihaczek. Signal energy distribution in time and frequency. *IEEE Transaction on Information Theory*, IT-14(3):369–374, 1968.
- [119] M. Rojewski. Wysokorozdzielczy spektrogram bezrastrowy. Szczegółowe wprowadzenie w tematykę pracy dyplomowej (materiały nieopublikowane), 2009.
- [120] R. Salamon. *Systemy Hydrolokacyjne*. Gdańskie Towarzystwo Naukowe, 2006.
- [121] J. Szabatin. *Podstawy teorii sygnałów*. Wydawnictwo Komunikacji i Łączności, 1982.
- [122] S. Umesh, D. J. Nelson. Computationally efficient estimation of sinusoidal frequency at low snr. *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP '96*, strony 2797–2800, 1996.
- [123] D. E. Vakman. On the analytic signal, the teager-kaiser energy algorithm, and other methods for defining amplitude and frequency. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44(4):791–797, 1996.
- [124] D. E. Vakman, L. A. Vainshtein. Amplitude, phase, frequency – fundamental concepts of oscillation theory. *Soviet Physics Uspekhi*, 20(12):1002–1016, 1977.
- [125] H. B. Voelcker. Toward a unified theory of modulation part i: Phase-envelope relationships. *Proceedings of the IEEE*, 54(3):340–354, 1966.

- [126] P. D. Welch. The use of fast fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms. *IEEE Transactions on Audio Electroacoustics*, AU-15:70–73, 1997.
- [127] K. Wesolowski. *Podstawy Cyfrowych Systemów Telekomunikacyjnych*. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności WKŁ, 2003.
- [128] E. Wigner. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Physical Review*, 40(5):749–759, 1932.
- [129] M. Wiktor, K. Świder. Zastosowanie zespolonej pulsacji chwilowej w analizie układów mikrofalowych metodą różnic skończonych w dziedzinie czasu. *Przegląd Telekomunikacyjny*, 2009(8-9):1696–1701, 2009.
- [130] P.M. Woodward. *Probability and information theory: with applications to radar*. McGraw-Hill Book, 1955.
- [131] L. Xiumei, B. Guoan. Reassignment methods for robust time-frequency representations. *Proceedings of 7th International Conference on Processing of Information, Communications and Signal Processing*, 2009.
- [132] T. Zieliński. *Reprezentacje sygnałów niestacjonarnych typu czas-częstotliwość i czas-skala*. Wydawnictwo AGH Kraków, 1994.
- [133] T. Zieliński. *Cyfrowe Przetwarzanie Sygnałów*. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności WKŁ, 2005.
- [134] M. Zivanovic. Detection of non-stationary sinusoids by using joint frequency reassignment and null-to-null bandwidth. *Proceedings of 16th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, Lozanna, Szwajcaria, 2008.
- [135] K. Świder. *Wykorzystanie zespolonej pulsacji chwilowej do ślepej synchronizacji symbolowej sygnałów QPSK*. Praca doktorska, Politechnika Gdańska; Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki, 2010.
- [136] K. Świder, T. Bandurski, R. Studański. Properties and interpretation of instantaneous complex frequency. *Polish Journal of Environmental Studies*, 20(5A):156–161, 2011.
- [137] K. Świder, M. Papaj. N-point estimators of the instantaneous complex frequency. *Proceedings of XV Poznań Telecommunications Workshop*, 2011.
- [138] K. Świder, L. Philips, M. Rojewski, R. Rykaczewski. Wykrywanie on-line anomalii w odebranych sygnałach psk za pomocą zespolonej pulsacji chwilowej. *Zeszyty Naukowe Wydziału, Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki Politechniki Gdańskiej*, 19(8):471–476, 2010.

# Spis rysunków

2.1	Krzywe obrazujące zależności parametrów ECI od szerokości okna analizującego typu Blackmana-Harrisa dla spektrogramów klasycznych. Analizie poddawano: A) sygnał świergotowy, B) sumę sygnału harmonicznego oraz impulsu. Spektrogramy klasyczne: C) sygnału świergotowego dla okna o efektywnej szerokości równej około 6.36 [ms], DEF) sumy sygnału impulsowego i fragmentu zespolonej sinusoidy dla efektywnych szerokości okien równych odpowiednio około: 3.8, 0.66 i 20.5 [ms]. . . . .	27
3.1	Spektrogramy sygnału świergotowego o liniowym przyroście częstotliwości chwilowej: A) spektrogram klasyczny, B) spektrogram skoncentrowany; efektywna szerokość okna analizującego dla obu spektrogramów wynosi 0.89 [ms]. . . . .	32
4.1	Spektrogramy sygnału dwu-składnikowego, którego składniki to świergoty o liniowo przyrastającej częstotliwości chwilowej: A) spektrogram klasyczny, B) spektrogram skoncentrowany; szerokość okna analizującego dla obu spektrogramów wynosi około 0.89 [ms]. . . .	37
4.2	Rozkład liczby stopni swobody sygnału A) jedno-komponentowy sygnał świergotowy, B) dwu-komponentowy sygnał świergotowy; efektywna szerokość okna analizującego dla obu spektrogramów wynosi około 0.89 [ms]. . . . .	38
4.3	A) Funkcja nieoznaczoności okna Gabora (Gausa) o efektywnej szerokości równej 135 [ms] oraz B) odpowiadający rozkład liczby stopni swobody na płaszczyźnie czas-częstotliwość. Zobrazowania są obliczone numerycznie bazując na krótkoczasowej transformacji Fouriera. . . . .	39
4.4	Schemat przedstawiający wybrane parametry okna Gabora. . . . .	40
4.5	Atraktogramy; szerokość okna analizującego dla obu spektrogramów wynosi około 0.89 [ms]; próg rozkładu liczby stopni swobody szacowanej w dziedzinie czas-częstotliwość, powyżej którego usunięto energię ze spektrogramu przyjęto jako: A) $\alpha_\chi = 0.4$ oraz B) $\alpha_\chi = 0.04$ . . . . .	41

4.6	A) Spektrogram klasyczny sygnału składającego się z trzech linear- nie modulowanych częstotliwościowo świergotów oraz B) odpowia- dający mu rozkład CICR. . . . .	42
4.7	A) Spektrogram klasyczny sygnału „ <i>cross-chirp</i> ” oraz B) odpowia- dający mu rozkład CICR. . . . .	43
4.8	Rozkłady kanałowego chwilowego przyspieszenia fazy obliczone: A) dla sygnału składającego się z trzech modulowanych częstotliwi- ściowo świergotów oraz B) dla sygnału „ <i>cross-chirp</i> ” . . . . .	44
4.9	Schemat przedstawiający interpretację makroskopową akcelerogramu kanałowej fazy chwilowej na przykładzie sygnału świergotowego o liniowo przyrastającej częstotliwości chwilowej. . . . .	44
4.10	Rozkłady A) CICR i B) CIAA obliczone dla jednoskładnikowego świergotu o liniowo modulowanej częstotliwości, którego parametr <i>chirp rate</i> wynosi 2000 Hz/s. . . . .	45
4.11	Zależności odchylenia standardowego estymacji parametru <i>chirp- rate</i> od efektywnej szerokości okna dla rozkładów: A) CICR oraz B) CIAA. Analizie poddano linearny świergot $u_{\text{chirp}}(t)$ , którego przy- rost częstotliwości chwilowej wynosi 2000 Hz/s. Wszystkie uzyskane rozkłady były poddawane wygładzaniu filtrem medianowym, któ- rego rozmiar maski wynosił $9 \times 9$ . . . . .	46
4.12	A) Zależności odchylenia standardowego estymacji parametru <i>chirp- rate</i> od ilorazu SNR obliczone dla linearnego świergotu $u_{\text{chirp}}(t)$ , którego <i>chirp-rate</i> wynosi $r_0=2000$ Hz/s. Efektywna szerokość okna analizującego wynosiła ok. $T_{\text{win}} \approx 4.1$ ms. Akcelerogramy były wy- gładzane dwoma filtrami medianowymi o rozmiarach masek odpo- wiednio $1 \times 9$ oraz $9 \times 9$ . B) Akcelerogram kanałowej fazy chwilowej sygnału wygładzony filtrem medianowym o rozmiarze maski $9 \times 9$ do analizowanego sygnału świergotowego został dodany szum biały; SNR wynosi około 30 dB. . . . .	47
4.13	AC) Spektrogramy klasyczne oraz BD) akcelerogramy kanałowej fazy chwilowej sporządzone bez użycia filtra medianowego media- nowego AB) dla sygnału świergotowego o modulowanej amplitudzie chwilowej oraz CD) dla sygnału składającego się z trzech kompo- nentów, z których każdy jest niezależnie modulowany amplitudowo. Efektywna szerokość okna analizującego wynosiła ok. $T_{\text{win}} \approx 7.2$ ms.	49
4.14	Analiza dźwięku fletu – efekt wibrato. A) Spektrogram klasyczny oraz B) odpowiadający mu rozkład CICR ( $T_{\text{win}} \approx 20.5$ ms) spo- rządzony bez użycia filtra medianowego medianowego. C) Spek- trogram skoncentrowany oraz D) atraktogram ( $T_{\text{win}} \approx 1.05$ ms, $\alpha_\chi = 0.001$ ). . . . .	50
4.15	Analiza syntetycznego sygnału $u_{\text{lam-chirp}}(t)$ ( $T_{\text{win}} \approx 5.1$ ms). A) Spektrogram klasyczny, B) spektrogram skoncentrowany, C) akce- lerogram kanałowej fazy chwilowej, D) atraktogram ( $\alpha_\chi = 0.1$ ). . .	51

4.16	Analiza syntetycznego sygnału $u_{\text{lam-chirp}}(t)$ z dodanym białym szumem Gaussowskim (SNR $\approx 20$ dB, $T_{\text{win}} \approx 5.1$ ms). A) Spektrogram klasyczny, B) spektrogram skoncentrowany, C) akcelerogram kanałowej fazy chwilowej, D) atraktogram ( $\alpha_{\chi} = 0.1$ ). . . . .	52
4.17	Analiza syntetycznego sygnału $u_{\text{lam-chirp}}(t)$ z dodanym białym szumem Gaussowskim (SNR $\approx 0$ dB, $T_{\text{win}} \approx 5.1$ ms). A) Spektrogram klasyczny, B) spektrogram skoncentrowany, C) akcelerogram kanałowej fazy chwilowej, D) atraktogram ( $\alpha_{\chi} = 0.1$ ). . . . .	53
4.18	Analiza syntetycznego sygnału $u_{\text{sin-chirp}}(t)$ z dodanym białym szumem Gaussowskim (SNR $\approx 0$ dB, $T_{\text{win}} \approx 5.1$ ms). A) Spektrogram klasyczny, B) spektrogram skoncentrowany, C) akcelerogram kanałowej fazy chwilowej, D) atraktogram ( $\alpha_{\chi} = 0.1$ ). . . . .	54
4.19	Analiza syntetycznego sygnału $u_{\text{sin-chirp}}(t)$ z dodanym białym szumem Gaussowskim (SNR $\approx 0$ dB, $T_{\text{win}} \approx 5.1$ ms). A) Spektrogram klasyczny, B) spektrogram skoncentrowany, C) akcelerogram kanałowej fazy chwilowej, D) atraktogram ( $\alpha_{\chi} = 0.1$ ). . . . .	55
4.20	Analiza syntetycznego sygnału $u_{\text{sfm-chirp}}(t)$ z dodanym białym szumem Gaussowskim. A) Spektrogram klasyczny, B) spektrogram skoncentrowany, CEF) akcelerogramy kanałowej fazy chwilowej, D) atraktogram ( $\alpha_{\chi} = 0.1$ ). Zobrazowania były sporządzone przy pomocy okna analizującego o efektywnej szerokości równej odpowiednio: ABCD) $T_{\text{win}} \approx 5.1$ ms, E) $T_{\text{win}} \approx 1.0$ ms oraz F) $T_{\text{win}} \approx 10.0$ ms.	56
4.21	Analiza syntetycznego sygnału $u_{2\text{-chirp}}(t)$ z dodanym białym szumem Gaussowskim ( $T_{\text{win}} \approx 5.1$ ms). A) Spektrogram klasyczny, B) spektrogram skoncentrowany, C) akcelerogram kanałowej fazy chwilowej, D) atraktogram ( $\alpha_{\chi} = 0.1$ ). . . . .	57
4.22	Analiza syntetycznego sygnału $u_{2\text{-chirp}}(t)$ z dodanym białym szumem Gaussowskim (SNR $\approx 30$ dB, $T_{\text{win}} \approx 5.1$ ms). A) Spektrogram klasyczny, B) spektrogram skoncentrowany, C) akcelerogram kanałowej fazy chwilowej, D) atraktogram ( $\alpha_{\chi} = 0.1$ ). . . . .	58
4.23	Spektrogramy klasyczne sygnałów reprezentujących efekt vibrato grany na różnych instrumentach muzycznych: A) na flecie ( $T_{\text{win}} \approx 20.5$ ms), B) na skrzypcach ( $T_{\text{win}} \approx 18.5$ ms) i C) na gitarze ( $T_{\text{win}} \approx 27.5$ ms). . . . .	60
4.24	Analiza dźwięku fletu – efekt vibrato. Charakterystyki parametru ECI w funkcji efektywnej szerokości okna analizującego obliczone dla A) spektrogramu klasycznego i B) spektrogramu skoncentrowanego. Spektrogramy obliczono stosując szerokość okna odpowiadającą najwyższej koncentracji energii: C) klasyczny ( $T_{\text{win}} \approx 20.5$ ms) oraz D) skoncentrowany ( $T_{\text{win}} \approx 1.05$ ms). E) Zmodyfikowany spektrogram klasyczny – przed przemieszczeniem energii ( $T_{\text{win}} \approx 1.05$ ms, $\alpha_{\chi} = 0.01$ ) F) atraktogram ( $T_{\text{win}} \approx 1.05$ ms, $\alpha_{\chi} = 0.001$ ). . . . .	61

- 4.25 Analiza dźwięku skrzypiec – efekt wibrato. Charakterystyki parametru ECI w funkcji efektywnej szerokości okna analizującego obliczone dla A) spektrogramu klasycznego i B) spektrogramu skoncentrowanego. Spektrogramy obliczono stosując szerokość okna odpowiadającą najwyższej koncentracji energii: C) klasyczny ( $T_{win} \approx 18.5$  ms) oraz D) skoncentrowany ( $T_{win} \approx 2.95$  ms). E) Zmodyfikowany spektrogram klasyczny – przed przemieszczeniem energii ( $T_{win} \approx 2.95$  ms,  $\alpha_\chi = 0.01$ ) F) atraktogram ( $T_{win} \approx 2.95$  ms,  $\alpha_\chi = 0.01$ ). . . . . 62
- 4.26 Analiza dźwięku gitary – efekt wibrato. Charakterystyki parametru ECI w funkcji efektywnej szerokości okna analizującego obliczone dla A) spektrogramu klasycznego i B) spektrogramu skoncentrowanego. Spektrogramy obliczono stosując szerokość okna odpowiadającą najwyższej koncentracji energii: C) klasyczny ( $T_{win} \approx 27.5$  ms) oraz D) skoncentrowany ( $T_{win} \approx 2.5$  ms). E) Zmodyfikowany spektrogram klasyczny – przed przemieszczeniem energii ( $T_{win} \approx 2.5$  ms,  $\alpha_\chi = 0.01$ ) F) atraktogram ( $T_{win} \approx 2.5$  ms,  $\alpha_\chi = 0.01$ ). . . 63
- 4.27 Zobrazowania efektu wibrato granego na różnych instrumentach muzycznych: AB) na flecie CD) na skrzypcach oraz EF) na gitarze. ACE) Spektrogramy klasyczne i BDF) Akcelerogramy kanałowej fazy chwilowej sygnału zostały obliczone stosując okno Blackmana-Harrisa o efektywnej szerokości równej w przybliżeniu odpowiednio AB)  $T_{win} \approx 3.3$  ms, CD)  $T_{win} \approx 6.1$  ms oraz EF)  $T_{win} \approx 3.5$  ms. . . 64
- 4.28 Analiza dźwięku gitary – efekt podciągnięcia struny (ang. *bending*). Charakterystyki parametru ECI w funkcji efektywnej szerokości okna analizującego obliczone dla A) spektrogramu klasycznego i B) spektrogramu skoncentrowanego. Spektrogramy obliczono stosując szerokość okna odpowiadającą najwyższej koncentracji energii: C) klasyczny ( $T_{win} \approx 95.0$  ms) oraz D) skoncentrowany ( $T_{win} \approx 3.8$  ms). E) Zmodyfikowany spektrogram klasyczny – przed przemieszczeniem energii ( $T_{win} \approx 3.8$  ms,  $\alpha_\chi = 0.01$ ) F) atraktogram ( $T_{win} \approx 3.8$  ms,  $\alpha_\chi = 0.01$ ,  $ECI \approx 4917$ ). . . . . 65
- 4.29 Analiza dźwięku gitary – efekt przeciągania plastikowej tulejki po strunach wzdłuż gryfu gitary (ang. *slide*). Charakterystyki parametru ECI w funkcji efektywnej szerokości okna analizującego obliczone dla A) spektrogramu klasycznego i B) spektrogramu skoncentrowanego. Spektrogramy obliczono stosując szerokość okna odpowiadającą najwyższej koncentracji energii: C) klasyczny ( $T_{win} \approx 42.0$  ms) oraz D) skoncentrowany ( $T_{win} \approx 4.5$  ms). E) Zmodyfikowany spektrogram klasyczny – przed przemieszczeniem energii ( $T_{win} \approx 4.5$  ms,  $\alpha_\chi = 0.1$ ) F) atraktogram ( $T_{win} \approx 4.5$  ms,  $\alpha_\chi = 0.01$ ,  $ECI \approx 4819$ ). . . . . 66

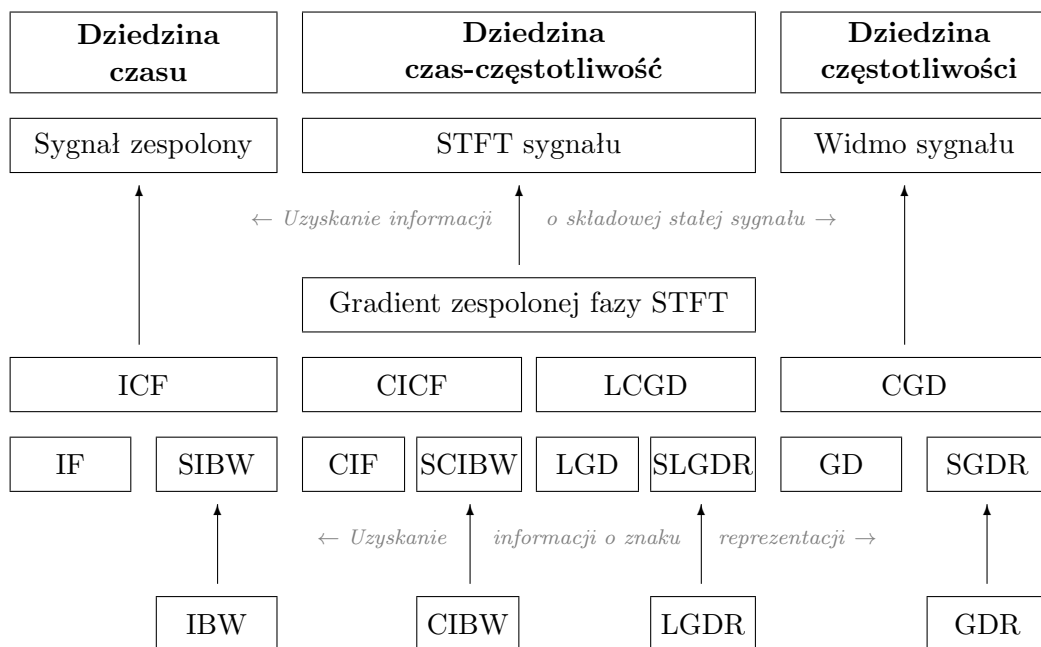
- 4.30 Analiza dźwięku gitary – flażolet. Charakterystyki parametru ECI w funkcji efektywnej szerokości okna analizującego obliczone dla A) spektrogramu klasycznego i B) spektrogramu skoncentrowanego. Spektrogramy obliczono stosując szerokość okna odpowiadającą najwyższej koncentracji energii: C) klasyczny ( $T_{win} \approx 42.0$  ms) oraz D) skoncentrowany ( $T_{win} \approx 4.5$  ms). E) Zmodyfikowany spektrogram klasyczny – przed przemieszczeniem energii ( $T_{win} \approx 4.5$  ms,  $\alpha_\chi = 0.1$ ) F) atraktogram ( $T_{win} \approx 4.5$  ms,  $\alpha_\chi = 0.01$ ,  $ECI \approx 3740$ ). . . . . 67
- 4.31 Analiza dźwięku gitary – powiększenia spektrogramów skoncentrowanych i atraktogramów. Efekt podciągnięcia struny: A) spektrogram skoncentrowany, B) atraktogram. Efekt przeciągnięcia plastikowej tulejki wzdłuż gryfu gitary: C) spektrogram skoncentrowany, D) atraktogram. Flażolet: E) spektrogram skoncentrowany, F) atraktogram. . . . . 68
- 4.32 Analiza dźwięku gitary – glissando. Charakterystyki parametru ECI w funkcji efektywnej szerokości okna analizującego obliczone dla A) spektrogramu klasycznego i B) spektrogramu skoncentrowanego. Spektrogramy obliczono stosując szerokość okna odpowiadającą najwyższej koncentracji energii: C) klasyczny ( $T_{win} \approx 30.0$  ms) oraz D) skoncentrowany ( $T_{win} \approx 2.8$  ms). E) Zmodyfikowany spektrogram klasyczny – przed przemieszczeniem energii ( $T_{win} \approx 2.8$  ms,  $\alpha_\chi = 0.1$ ) F) atraktogram ( $T_{win} \approx 2.8$  ms,  $\alpha_\chi = 0.01$ ,  $ECI \approx 1516$ ). . . . . 69
- 4.33 Analiza dźwięku gitary – szybkie granie krótkich dźwięków (ang. *taping*). Charakterystyki parametru ECI w funkcji efektywnej szerokości okna analizującego obliczone dla A) spektrogramu klasycznego i B) spektrogramu skoncentrowanego. Spektrogramy obliczono stosując szerokość okna odpowiadającą najwyższej koncentracji energii: C) klasyczny ( $T_{win} \approx 23.0$  ms) oraz D) skoncentrowany ( $T_{win} \approx 1.0$  ms). E) Zmodyfikowany spektrogram klasyczny – przed przemieszczeniem energii ( $T_{win} \approx 1.0$  ms,  $\alpha_\chi = 0.1$ ) F) atraktogram ( $T_{win} \approx 1.0$  ms,  $\alpha_\chi = 0.01$ ,  $ECI \approx 5870$ ). . . . . 70
- 4.34 Analiza dźwięku gitary – technika legato. Charakterystyki parametru ECI w funkcji efektywnej szerokości okna analizującego obliczone dla A) spektrogramu klasycznego i B) spektrogramu skoncentrowanego. Spektrogramy obliczono stosując szerokość okna odpowiadającą najwyższej koncentracji energii: C) klasyczny ( $T_{win} \approx 26.0$  ms) oraz D) skoncentrowany ( $T_{win} \approx 5.0$  ms). E) Zmodyfikowany spektrogram klasyczny – przed przemieszczeniem energii ( $T_{win} \approx 5.0$  ms,  $\alpha_\chi = 0.1$ ) F) atraktogram ( $T_{win} \approx 5.0$  ms,  $\alpha_\chi = 0.01$ ,  $ECI \approx 9290$ ). . . . . 71



- 4.35 Analiza dźwięku gitary – technika staccato. Charakterystyki parametru ECI w funkcji efektywnej szerokości okna analizującego obliczone dla A) spektrogramu klasycznego i B) spektrogramu skoncentrowanego. Spektrogramy obliczono stosując szerokość okna odpowiadającą najwyższej koncentracji energii: C) klasyczny ( $T_{win} \approx 13.0$  ms) oraz D) skoncentrowany ( $T_{win} \approx 2.0$  ms). E) Zmodyfikowany spektrogram klasyczny – przed przemieszczeniem energii ( $T_{win} \approx 2.0$  ms,  $\alpha_\chi = 0.1$ ) F) atraktogram ( $T_{win} \approx 2.0$  ms,  $\alpha_\chi = 0.01$ ,  $ECI \approx 6969$ ). . . . . 72
- 4.36 Analiza impulsu nadawczego sonaru aktywnego o szerokości pasma wynoszącego 3 kHz. Czas trwania impulsu sondującego wynosił odpowiednio dla zobrazowań ACE) 250 ms oraz dla BDF) 0.5 s. Na powyższym zestawieniu ujęto: AB) spektrogramy klasyczne CD) spektrogramy skoncentrowane oraz EF) akcelerogramy kanałowej fazy chwilowej sygnału. Zastosowano okno analizujące Blackmana-Harrisa o efektywnej szerokości równej w przybliżeniu  $T_{win} \approx 1.0$  ms. 73
- 37 System definicyjny reprezentacji sygnału omówionych w niniejszej pracy – z podziałem na dziedziny w jakich dane reprezentacje są zdefiniowane. Czarne strzałki na rysunku reprezentują przyrost informacji o sygnale. . . . . 93

# Dodatki

## System definicyjny



Rysunek 37: System definicyjny reprezentacji sygnału omówionych w niniejszej pracy – z podziałem na dziedziny w jakich dane reprezentacje są zdefiniowane. Czarne strzałki na rysunku reprezentują przyrost informacji o sygnale.

## Pochodne cząstkowe drugiego rzędu zespolonej fazy STFT

Pochodna cząstkowa drugiego rzędu zespolonej fazy STFT względem czasu:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(t, \omega) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \ln \{U(t, \omega)\} = \\
 &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \ln \{A(t, \omega) \exp(j\phi(t, \omega))\} = \\
 &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \ln \{A(t, \omega)\} + \ln \{ \exp(j\phi(t, \omega)) \} \right\} = \\
 &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{ \Lambda(t, \omega) + j\phi(t, \omega) \} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \Lambda(t, \omega) + j \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, \omega) \right\} = \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \{ \Sigma(t, \omega) + j\Omega(t, \omega) \} = \frac{\partial}{\partial t} S(t, \omega)
 \end{aligned} \tag{19}$$

lub:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(t, \omega) &= \frac{\partial}{\partial t} S(t, \omega) = \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{U(t, \omega)} \frac{\partial U(t, \omega)}{\partial t} \right\} = \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{U(t, \omega)} \frac{\partial}{\partial t} U(t, \omega) + \frac{1}{U(t, \omega)} \frac{\partial^2 U(t, \omega)}{\partial t^2} = \\
 &= -\frac{1}{U^2(t, \omega)} \frac{\partial}{\partial t} U(t, \omega) \frac{\partial}{\partial t} U(t, \omega) + \frac{1}{U(t, \omega)} \frac{\partial^2 U(t, \omega)}{\partial t^2} = \\
 &= -\left( \frac{1}{U(t, \omega)} \frac{\partial}{\partial t} U(t, \omega) \right)^2 + \frac{1}{U(t, \omega)} \frac{\partial^2 U(t, \omega)}{\partial t^2} = \\
 &= \frac{1}{U(t, \omega)} \frac{\partial^2 U(t, \omega)}{\partial t^2} - S^2(t, \omega)
 \end{aligned} \tag{20}$$

zatem:

$$\frac{\partial}{\partial t} S(t, \omega) + S^2(t, \omega) = \frac{1}{U(t, \omega)} \frac{\partial^2 U(t, \omega)}{\partial t^2} \tag{21}$$

Pochodna cząstkowa drugiego rzędu zespolonej fazy STFT po częstotliwości:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \Psi(t, \omega) &= \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \ln \{U(t, \omega)\} = \\
&= \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \ln \{A(t, \omega) \exp(j\phi(t, \omega))\} = \\
&= \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \left\{ \ln \{A(t, \omega)\} + \ln \{ \exp(j\phi(t, \omega)) \} \right\} = \\
&= \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \{ \Lambda(t, \omega) + j\phi(t, \omega) \} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} \Lambda(t, \omega) + j \frac{\partial}{\partial \omega} \phi(t, \omega) \right\} = \\
&= \frac{\partial}{\partial \omega} \{ \mathcal{U}(t, \omega) - j\Theta(t, \omega) \} = \frac{\partial}{\partial \omega} Z(t, \omega)
\end{aligned} \tag{22}$$

lub:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \Psi(t, \omega) &= \frac{\partial}{\partial \omega} Z(t, \omega) = \\
&= \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \frac{1}{U(t, \omega)} \frac{\partial U(t, \omega)}{\partial \omega} \right\} = \\
&= \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{U(t, \omega)} \frac{\partial}{\partial \omega} U(t, \omega) + \frac{1}{U(t, \omega)} \frac{\partial^2 U(t, \omega)}{\partial \omega^2} = \\
&= -\frac{1}{U^2(t, \omega)} \frac{\partial}{\partial \omega} U(t, \omega) \frac{\partial}{\partial \omega} U(t, \omega) + \frac{1}{U(t, \omega)} \frac{\partial^2 U(t, \omega)}{\partial \omega^2} = \\
&= -\left( \frac{1}{U(t, \omega)} \frac{\partial}{\partial \omega} U(t, \omega) \right)^2 + \frac{1}{U(t, \omega)} \frac{\partial^2 U(t, \omega)}{\partial \omega^2} = \\
&= \frac{1}{U(t, \omega)} \frac{\partial^2 U(t, \omega)}{\partial \omega^2} - Z^2(t, \omega)
\end{aligned} \tag{23}$$

zatem:

$$\frac{\partial}{\partial t} Z(t, \omega) + Z^2(t, \omega) = \frac{1}{U(t, \omega)} \frac{\partial^2 U(t, \omega)}{\partial \omega^2} \tag{24}$$

Pochodna mieszana cząstkowa drugiego rzędu zespolonej fazy STFT

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t \partial \omega} \Psi(t, \omega) &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial \omega} \ln \{U(t, \omega)\} = \\
&= \frac{\partial^2}{\partial t \partial \omega} \ln \{A(t, \omega) \exp(j\phi(t, \omega))\} = \\
&= \frac{\partial^2}{\partial t \partial \omega} \left\{ \ln \{A(t, \omega)\} + \ln \{ \exp(j\phi(t, \omega)) \} \right\} = \\
&= \frac{\partial^2}{\partial t \partial \omega} \{ \Lambda(t, \omega) + j\phi(t, \omega) \} = \frac{\partial^2}{\partial t \partial \omega} \Lambda(t, \omega) + j \frac{\partial^2}{\partial t \partial \omega} \phi(t, \omega) = \\
&= \frac{\partial}{\partial \omega} \Sigma(t, \omega) + j \frac{\partial}{\partial \omega} \Omega(t, \omega) = \frac{\partial}{\partial \omega} S(t, \omega) = \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}(t, \omega) - j \frac{\partial}{\partial t} \Theta(t, \omega) = \frac{\partial}{\partial t} Z(t, \omega)
\end{aligned} \tag{25}$$

lub:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t \partial \omega} \Psi(t, \omega) &= \frac{\partial}{\partial \omega} S(t, \omega) = \\
&= \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \frac{1}{U(t, \omega)} \frac{\partial U(t, \omega)}{\partial t} \right\} = \\
&= \frac{\partial U(t, \omega)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \frac{1}{U(t, \omega)} \right\} + \frac{1}{U(t, \omega)} \frac{\partial^2 U(t, \omega)}{\partial t \partial \omega} = \\
&= \frac{1}{U(t, \omega)} \frac{\partial^2 U(t, \omega)}{\partial t \partial \omega} - \frac{1}{U^2(t, \omega)} \frac{\partial U(t, \omega)}{\partial t} \frac{\partial U(t, \omega)}{\partial \omega} = \\
&= \frac{1}{U(t, \omega)} \frac{\partial^2 U(t, \omega)}{\partial t \partial \omega} - S(t, \omega) Z(t, \omega)
\end{aligned} \tag{26}$$

oraz dualnie:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t \partial \omega} \Psi(t, \omega) &= \frac{\partial}{\partial t} Z(t, \omega) = \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{U(t, \omega)} \frac{\partial U(t, \omega)}{\partial \omega} \right\}
\end{aligned} \tag{27}$$